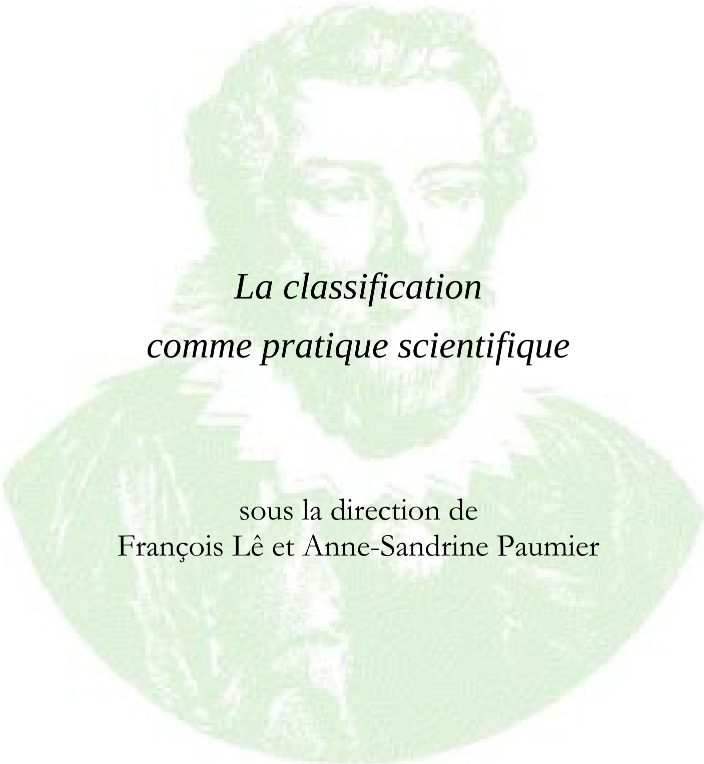
CAHIERS
FRANÇOIS VIETE

Série III – N°1

2016



La classification
comme pratique scientifique

sous la direction de
François Lê et Anne-Sandrine Paumier

Centre François Viète
Épistémologie, histoire des sciences et des techniques
Université de Nantes - Université de Bretagne Occidentale

Imprimerie Centrale de l'Université de Nantes
Octobre 2016

Cahiers François Viète

La revue du *Centre François Viète*
Épistémologie, Histoire des Sciences et des Techniques
EA 1161, Université de Nantes - Université de Bretagne Occidentale
ISSN 1297-9112

cahiers-francois-viete@univ-nantes.fr
www.cfv.univ-nantes.fr

Depuis 1999, les *Cahiers François Viète* publient des articles originaux, en français ou en anglais, d'épistémologie et d'histoire des sciences et des techniques. Les *Cahiers François Viète* se sont dotés d'un comité de lecture international depuis 2016.

UNIVERSITÉ DE NANTES

ISBN 978-2-86939-242-7

SOMMAIRE

Cahiers François Viète, série III, 1, 2016, p. 9-34

De la science comme classification à la classification comme pratique scientifique : quelques réflexions à partir de deux cas mathématiques

François Lê* & Anne-Sandrine Paumier†

Résumé
Dans cet article introductif, plusieurs pistes de réflexion sur le sujet de la classification sont présentées. En partant de déclarations de Henri Poincaré assimilant science et classification, nous proposons d'aborder la question classificatoire en nous concentrant sur la pratique des scientifiques. Deux exemples mathématiques sont ensuite examinés — le premier se rapporte à des points de vue de membres du groupe Bourbaki, tandis que le second a trait à des travaux classificatoires de surfaces dites « cubiques » datant du XIX*e siècle —, invitant notamment à considérer avec attention les relations interdisciplinaires pouvant exister autour des questions de classification.*

Mots-clés : classifications, histoire des mathématiques, Bourbaki, structures, surfaces cubiques.

Abstract
This introductory article presents several lines of thought about the topic of classification. Starting with statements of Henri Poincaré assimilating science and classification, we suggest to tackle the classificatory question by focusing on the scientific practice. Two mathematical examples are discussed—the first one relates to points of view of members of the group Bourbaki, while the second one describes works of the 19th century classifying the so-called "cubic" surfaces—, inviting us to carefully consider the interdisciplinary links existing in the issue of classification.

Keywords: classifications, history of mathematics, Bourbaki, structures, cubic surfaces.

* Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 43 blvd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne cedex, France.

† Institut des Hautes Études Scientifiques, Fondation Mathématique Jacques Hadamard.

« Maintenant, qu'est-ce que la science ? Je l'ai expliqué au § précédent, c'est avant tout une classification, une façon de rapprocher des faits que les apparences séparaient, bien qu'ils fussent liés par quelque parenté naturelle et cachée » (Poincaré, 1905, p. 265-266). Par ces mots issus de son essai philosophique *La Valeur de la Science*, Henri Poincaré assimile sans détour science et classification, la première consistant comme la seconde à révéler les relations existant entre des faits donnés. « On dira que la science n'est qu'une classification » (p. 271), insiste-t-il quelques lignes plus loin, entérinant cette idée d'identité d'essence entre science et classification.

Si forte et réfléchie que puisse apparaître cette position de Poincaré, il faut noter cependant que la question du lien entre science et classification n'est pas un thème faisant l'objet de longs développements dans *La Valeur de la Science*. Les passages que nous venons de citer y surviennent en effet au cours de la discussion finale sur l'objectivité de la science, et à part le paragraphe auquel fait référence notre citation introductive, la poignée d'autres mentions de « classification » dans l'essai ne sont accompagnées d'aucun commentaire épistémologique général (p. 75, 131, 226, 261). En fait, dans les autres grands écrits philosophiques de Poincaré que sont *La Science et l'hypothèse*, *Science et méthode* et les posthumes *Dernières pensées*, aucune discussion générale sur l'activité classificatoire et ses liens avec l'activité scientifique n'est pas non plus développée, les quelques occurrences du mot « classification » dans ces livres renvoyant le plus souvent à des situations mathématiques bien spécifiques[1].

Que de façon générale la philosophie de Poincaré s'inspire de son activité scientifique est un point qui a déjà été souligné et commenté ; joint à la constatation sur les occurrences du mot « classification » faite à l'instant, cela semble ainsi suggérer que, plus spécifiquement, les réflexions de Poincaré sur la place de la classification dans les sciences aient été construites (au moins

[1] Par exemple, il est question de classification des problèmes de probabilité (Poincaré, 1902, p. 219) ou de classification de nombres et de fonctions transcendants (Poincaré, 1908, p. 36). Dans *Dernières pensées*, le chapitre « Sur la logique de l'infini » s'ouvre sur un paragraphe présentant « ce que doit être une classification » (Poincaré, 1913, p. 101). Ce paragraphe contient quelques réflexions sur la notion de classification mais aucun lien avec l'activité scientifique en général n'est évoqué.

partiellement) à partir de sa pratique mathématique et physique[2]. L'importance qu'il donne à la classification aurait ainsi été alimenté notamment par son travail de recherche quotidien, mais aussi par ses diverses lectures, par ses échanges, par les enseignements qu'il a reçus ou encore à travers les usages en place et les connaissances usuelles liés aux domaines scientifiques auxquels il s'est intéressé[3].

De fait, même en se restreignant au seul cas des mathématiques, force est de constater que les problèmes de classification ne manquent pas, quelle que soit l'époque considérée. Pour donner quelques exemples parmi bien d'autres, mentionnons les classifications des courbes et des problèmes de la géométrie par Pappus d'Alexandrie au IVe siècle (puis par René Descartes au XVIIe siècle), des équations du troisième degré par Omar Al-Khayyām au XIe siècle, des courbes cubiques par Isaac Newton au XVIIe siècle, des fonctions par Leonhard Euler au XVIIIe siècle, des formes quadratiques par Carl Friedrich Gauss et des nœuds par Peter Tait au XIXe siècle, ou encore des algèbres à division par Abraham Adrian Albert au XXe siècle. Toutes ces classifications ont déjà été prises en compte et analysées dans des travaux d'historiens des mathématiques, mais leurs descriptions ne sont pas, pour la plupart, le but premier des recherches dans lesquelles elles apparaissent[4]. Plus encore, il semble que l'activité classificatoire elle-même n'a pas encore été considérée comme objet d'étude à part entière en histoire des mathématiques.

Notre ambition ici est d'ouvrir la voie dans cette direction[5]. Pour cela,

---

[2] Au sujet de l'influence de la pratique scientifique sur la philosophie de Poincaré, voir (Rollet, 1999) et les références qui y sont données aux pages 6-7. Comme le souligne Laurent Rollet dans sa thèse, rappelons que les positions épistémologiques de Poincaré ont aussi été nourries par ses lectures et contacts philosophiques. Pour le problème spécifique de la classification, nous n'explorerons toutefois pas cette voie, préférant nous focaliser sur les liens à la pratique scientifique. Nous remercions le rapporteur anonyme de l'article d'avoir attiré notre attention sur ce point.

[3] Le problème de la classification s'étend bien entendu au-delà des sciences telles que les mathématiques ou la physique. Voir par exemple les réflexions de Patrick Tort sur les enjeux classificatoires de la linguistique à l'anthropologie, en passant par la théorie de la connaissance, les sciences naturelles et la biogénétique (Tort, 1989).

[4] Dans l'ordre de l'énumération précédente, voir (Boyer, 1956 ; Dumbaugh Fenster, 2007 ; Epple, 1999 ; Ferraro, 2000 ; Herreman, 2012 ; Lemmermeyer, 2007 ; Rashed, 2011).

[5] Notons que la question de la classification des sciences et du savoir en général a déjà fait l'objet de nombreuses enquêtes historiques. Conscients des liens de cette question avec celle des classifications comme décrites dans le paragraphe précédent, nous souhaitons

nous nous basons sur deux études de cas mettant en lumière un certain nombre de problèmes et de pistes de réflexion au sujet de la question classificatoire en mathématiques. Nous verrons en particulier que ces exemples invitent à aborder cette question en la décloisonnant justement des seules mathématiques par un regard interdisciplinaire.

Classification pour Bourbaki : une entreprise encyclopédiste, structuraliste ou naturaliste ?

Notre premier exemple se rapporte au collectif de mathématiciens Bourbaki et à ses rapports à la pratique de la classification en mathématiques. Rappelons que ce collectif a été fondé en 1935 et que son influence a été majeure dans les mathématiques françaises des années 1950-1960. Deux aspects de son fonctionnement pourront être retenus : d'une part, une activité réservée aux seuls membres du groupe que sont les congrès internes réguliers au cours desquels sont discutées les rédactions qui, à terme, sont intégrées dans les *Éléments de mathématique*, ouvrage visant à présenter la discipline de façon complète et cohérente ; d'autre part, une activité publique consistant en l'organisation des séminaires Bourbaki, événements à l'Institut Henri Poincaré auxquels viennent assister de nombreux mathématiciens de province[6].

Dans cette section, nous allons en particulier nous intéresser au regard sur la classification de deux des membres de Bourbaki : l'un de ses fondateurs, Jean Dieudonné, très actif rédacteur au sein du groupe, et le premier membre de seconde génération Laurent Schwartz, qui rejoint les activités du groupe pendant la Seconde Guerre mondiale[7].

Ces deux mathématiciens ont la particularité d'accorder une grande place à la classification dans leur pratique scientifique, mathématique pour Dieudonné,

---

toutefois concentrer notre attention sur ces dernières. Outre l'article (Braverman, 2015) au sujet de tels liens, voir le volume 115 (n° 1-2) de la *Revue de synthèse* de 1994 sur « La Classification des sciences », et plus récemment le numéro 40-41, « Les Branches du savoir dans l'Encyclopédie » (2008), des *Recherches sur Diderot et l'Encyclopédie*, le volume 104 (n° 3) de 2013 de la revue *Isis* consacré aux classifications actuelles en histoire des sciences, ainsi que (Grailles et al., 2015) à propos des liens entre classification, archives et bibliothèques.

6 Sur Bourbaki, voir les travaux de Liliane Beaulieu, en particulier (Beaulieu, 1989).

7 Sur Dieudonné et son œuvre mathématique, voir (Dugac, 1995). Sur certains aspects de la vie et des mathématiques de Schwartz, voir (Paumier, 2014).

naturaliste pour Schwartz. Lorsqu'il revient sur sa pratique mathématique au sein de Bourbaki, Dieudonné affirme ainsi[8] :

> [O]bligé d'apprendre sans cesse du nouveau et d'essayer de le repenser avec un esprit vierge, je fus amené, presque sans le vouloir, et tout en assouvissant à plaisir ma manie classificatrice, à travailler moi-même dans des parties de plus en plus étendues des mathématiques. (Dieudonné, 1981, Tome I, p. 3)

Schwartz est quant à lui un collectionneur passionné de papillons, et décrit ses intérêts de jeunesse pour la botanique dans son autobiographie (1997, p. 11-38) — il est toutefois *a priori* difficile de savoir s'il existe un véritable lien entre sa pratique mathématique et sa pratique naturaliste.

Pour ces acteurs, l'objectif de Bourbaki est avant tout une entreprise de classification mathématique, comparable à « l'immense révolution introduite par Linné avec son *Systema naturae* », comme l'écrit Schwartz dans son autobiographie (p. 162). Si ce dernier y réaffirme cette position : « Bourbaki est le Linné des mathématiques » (p. 163), il semble en fait que ce soit Jean Dieudonné qui, le premier, ait proposé une analogie entre l'entreprise de Bourbaki avec ses *Éléments de mathématique* et celle des naturalistes avec leurs traités, dans une description qu'il donne de l'activité du collectif de mathématiciens[9].

Dans cette description, Dieudonné commence par évaluer l'activité de Bourbaki en regard du projet d'encyclopédie mathématique lancé en Allemagne

---

[8] Dieudonné s'est effectivement intéressé à de très nombreuses parties des mathématiques : loin de se cantonner à un seul domaine, il devient par exemple la plume de Grothendieck en collaborant à la rédaction de ses *Éléments de géométrie algébrique* à partir de 1959.

[9] (Dieudonné, 1969). Nous remercions Liliane Beaulieu d'avoir attiré notre attention sur ce texte, dans lequel Dieudonné explique le fonctionnement interne de Bourbaki. Ce texte a été traduit en plusieurs langues, notamment en anglais (Dieudonné, 1970). Dieudonné est celui qui s'exprime le plus, en son nom et en celui de Bourbaki, sur l'activité du groupe. Si ses conclusions sur le rôle de Bourbaki dans l'histoire des mathématiques sont critiquables, nous ne citons ici que certains aspects de la pratique mathématique de Bourbaki telle qu'il la relate. Dieudonné a exercé une influence certaine sur les intérêts et travaux de Schwartz, et ils ont ensuite travaillé ensemble à Nancy, en particulier sur les espaces vectoriels topologiques. De manière générale, il n'est pas surprenant qu'une telle opinion professée par un membre de Bourbaki circule parmi ses membres, et qu'un autre la reprenne ensuite à son compte, comme c'est le cas ici pour Dieudonné et Schwartz.

au tournant du siècle, tout en l'en dissociant[10]. S'il explique ailleurs avoir personnellement assouvi sa passion des encyclopédies avec Bourbaki[11], les *Éléments* de ce dernier se distinguent quant à eux du projet d'une encyclopédie car il « prend les mathématiques à leur début et donne des démonstrations complètes[12] ». Les questions de choix comme d'organisation dans ce traité deviennent primordiales et aboutissent à des réflexions de nature classificatoire. Dieudonné file ainsi la métaphore naturaliste :

> Je compare volontiers les vieilles divisions des mathématiques aux vieilles divisions des anciens zoologues, qui voyant qu'un dauphin ou un requin ou un thon, étaient, ma foi, des animaux très voisins, disaient : ce sont des poissons puisque tous vivent dans la mer et ont des formes voisines ; il a fallu un certain temps pour se rendre compte que les structures de ces animaux n'étaient pas du tout pareilles, et qu'il fallait les mettre dans des classifications très éloignées. Algèbre, Arithmétique, Géométrie et toutes ces vieilles balivernes sont tout à fait comparables : il faut regarder la structure de chaque théorie et les classer de cette façon-là. Malgré tout, bien entendu, il ne faut pas longtemps pour se rendre compte que malgré cet effort vers l'isolement des structures, elles ont une manière de se mélanger très rapidement et de la façon la plus fructueuse. On peut dire que les grandes idées en mathématiques proviennent de rencontres de plusieurs structures très différentes. (Dieudonné, 1969, p. 19)

Les rapprochements entre mathématiques et sciences naturelles ainsi créés par Dieudonné et Schwartz tendent à donner à Bourbaki l'ampleur qu'a pu avoir Linné dans la classification des espèces vivantes[13]. Ce faisant, ces porte-parole du groupe en construisent une certaine image, mettant en avant une rupture dans la conception des mathématiques de Bourbaki avec ce qui l'a précédé.

La citation précédente de Dieudonné met aussi en évidence l'importance accordée à la notion de structure. Cette notion est ce qui distingue l'entreprise de classification de l'organisation d'une encyclopédie ou d'un recensement bibliographique (Dieudonné, 1969). Elle est aussi ce qui doit prévaloir dans

---

[10] L'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* est un projet collectif qui a été porté par Felix Klein à la fin du XIXe siècle, dont l'objectif était de faire le bilan des connaissances mathématiques de ce siècle. Voir (Gispert, 1999 ; Tobies, 1994).

[11] Au sujet de Dieudonné et des encyclopédies, voir (Dieudonné, 1981, Tome I, p. 3).

[12] Cette citation est tirée du « Mode d'emploi » des *Éléments* (Bourbaki, 1940, p. v).

[13] Sur Linné et la classification en sciences naturelles, voir par exemple (Hoquet, 2005). Voir aussi (Duris, 1998) sur le « culte de Linné en France et à l'étranger au XIXe siècle ».

l'organisation et la classification des mathématiques, au détriment des divisions disciplinaires habituelles, comme l'algèbre ou la géométrie. On entrevoit ainsi chez Dieudonné un lien fort entre la classification des mathématiques et la pratique mathématique de la classification. Comme expliqué dans « L'Architecture des mathématiques » (Bourbaki, 1948), ce sont encore les structures qui permettent la classification des objets mathématiques eux-mêmes, *via* l'analyse des axiomes qu'ils vérifient[14]. « Pour définir un objet, on définit les axiomes qu'il doit vérifier, et non cet objet lui-même », écrit par ailleurs Schwartz (1997, p. 159). Dans cette perspective, un résultat de classification en mathématique est une comparaison de différentes structures, dans laquelle deux structures isomorphes sont identifiées[15].

Plus encore, et comme on peut déjà le voir dans les dires de Dieudonné rapportés plus haut, ce sont les structures qui sont utilisées pour faire le lien entre mathématiques et sciences naturelles. Ainsi, alors qu'il poursuit la comparaison avec l'entreprise de Linné, Schwartz rappelle les degrés introduits par ce dernier : « Embranchements, classes, ordres, familles, genres, espèces, sous-espèces », et se concentre sur l'exemple de la baleine, que le naturaliste suédois avait pour la première fois classé parmi les mammifères en 1758, traduisant ainsi le fait que sa structure en est plus proche qu'elle ne l'est des poissons. Schwartz analyse par comparaison la construction des théories mathématiques dont il écrit qu'elles procèdent plutôt par croisements que par lignées verticales. Il en donne pour exemple :

[14] La notion de structure est définie dans le premier tome paru (en 1939) des *Éléments*, intitulé *Fascicule de résultats, Théorie des ensembles* (8, 2). Bourbaki (1948) explique dans les grandes lignes ce qu'il entend par *structure mathématique* : « Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature *n'est pas spécifiée* ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments (dans le cas des groupes, c'est une relation τ définie par une égalité du type $z = x\tau y$ entre trois éléments quelconques) ; on postule ensuite que les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les *axiomes* de la structure envisagée. » Un exemple de structure algébrique est la structure de corps, qui est définie par deux lois de composition. L'addition et la multiplication des nombres réels définissent ainsi une structure de corps sur $\mathbf{R}$.

[15] Voir la description de la méthode employée dans les « problèmes de classification » dans (Dieudonné, 1987, p.157-163), où sont donnés plusieurs exemples historiques de tels problèmes de classification mathématique résolus.

> Ainsi le lion : embranchement des vertébrés, classe des mammifères, ordre des carnivores, famille des félidés, genre *Panthera*, espèce *Panthera leo*. Le tigre partage cette classification jusqu'au genre *Panthera* mais appartient à l'espèce *Panthera tigris*. [...]
>
> Les théories mathématiques procèdent plutôt par croisements que par lignées verticales. Les espaces vectoriels topologiques sont à l'intersection de la catégorie des espaces vectoriels et de la catégorie des espaces topologiques. (Schwartz, 1997, p. 162-163)

Si la notion de structure est donc au cœur de l'analogie entre classification naturaliste et classification mathématique, elle diffère pour Schwartz dans ses modalités : classification arborescente pour les animaux (figure 1) et croisements ensemblistes pour les mathématiques (figure 2). Une espèce comme le tigre se trouve à l'extrémité d'une lignée verticale (figure 1), alors que la structure d'espace vectoriel topologique se trouve à l'intersection entre la structure d'espace vectoriel et de celle d'espace topologique (figure 2).

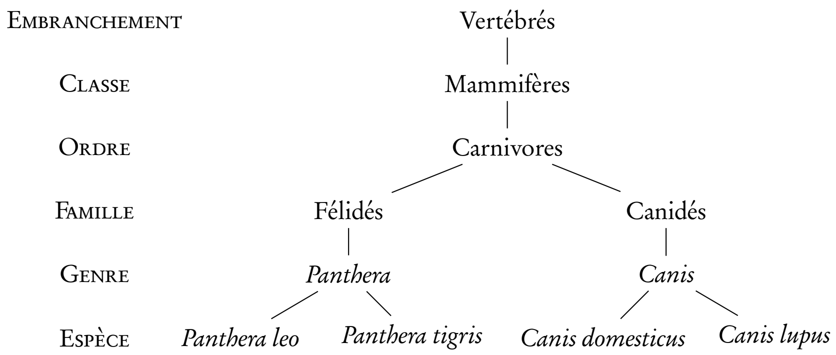


Figure 1 – Lignées verticales chez Linné, d'après Schwartz

L'analogie entre classifications naturalistes et mathématiques est donc renforcée par Dieudonné et Schwartz par la mise en avant de la notion de structure, vue comme transversale aux deux disciplines bien qu'organisant les classifications selon des directions différentes. Nous souhaitons maintenant confronter ce discours à quelques éléments plus proches de la pratique mathématique réelle au sein de Bourbaki.

Il faut d'abord noter que les déclarations que nous avons relevées jusqu'à présent participent à la construction de l'image structuraliste des mathématiques

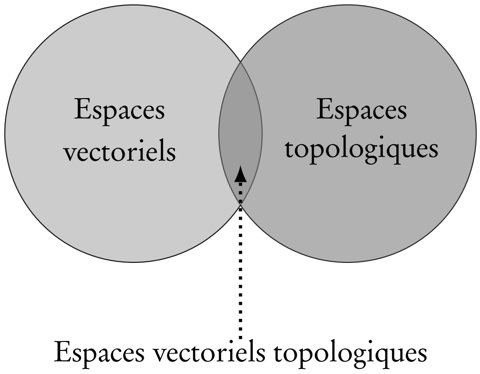


Figure 2 – Croisements de structures mathématiques, d'après Schwartz

donnée par Bourbaki. Elles correspondent à un contexte culturel particulier[16] et propagent l'idée que c'est Bourbaki qui introduit les structures comme mode de pensée en mathématiques. Leo Corry a montré que la notion formelle de structure ne joue finalement pas de rôle dans l'organisation des *Éléments*, pas plus que dans celle des mathématiques de ce traité (Corry, 2001, p. 289-338). En fait, les classifications ne forment pas non plus le cœur des *Éléments*. En effet, si l'on regarde par exemple la manière dont y sont traités les corps finis, on peut lire en introduction qu'il s'agit d'une « classification des corps finis », mais rien dans le chapitre en question ne permet de reconnaître cette classification : ni commentaires, ni efforts d'organisation, si ce n'est quelques remarques éparses dans la note historique qui suit[17].

Nous souhaitons néanmoins suggérer ici que les structures jouent un rôle déterminant dans la conception et la pratique mathématique, notamment classificatoire, de ses différents membres en particulier.

Par exemple, Schwartz conserve de sa formation bourbakiste une pratique méthodique d'identification des structures, dont nous avons vu qu'elles étaient au cœur de la pratique classificatoire pour Bourbaki[18]. Il écrit ainsi que « [s]on esprit mathématique, profondément classificateur, goûtait au plus haut

[16] Sur différentes images du structuralisme en France, voir (Aubin, 1997).

[17] Les fascicules d'algèbre sont parus à partir de 1947. Nous nous basons ici sur une édition ultérieure regroupant plusieurs volumes : (Bourbaki, 1970, p. xiii), (Bourbaki, 1981, p. v.1, v.138) et la note historique (Bourbaki, 1981, p. vii.69-vii.76).

[18] Sur les rencontres mathématiques entre Bourbaki et Schwartz, voir (Paumier, 2014, chapitre 1).

point cette organisation qu['il n'a] jamais cessé de respecter. Les distributions s'étudient d'abord sur $\mathbf{R}^n$, puis sur n'importe quel espace affine de dimension finie, puis, sous forme de courants, sur n'importe quelle variété indéfiniment différentiable[19] » : dans sa recherche de généralisation de sa théorie des distributions, il se place dans le cadre des structures telles qu'il a été décrit plus haut. Le même objet, à savoir une forme différentielle continue sur un certain espace, peut se définir sur un espace avec une structure de moins en moins riche et de plus en plus générale ($\mathbf{R}^n$, espace affine de dimension finie, variété indéfiniment différentiable), et un nom différent lui est alors donné selon le cas (distribution, distribution-vectorielle, courant)[20].

Ce problème de dénomination joue par ailleurs un rôle important dans les façons de faire mathématiques telles que prônées par Bourbaki. Dieudonné et Schwartz considèrent ainsi que Bourbaki a introduit un vocabulaire « éminemment simplificateur » (Dieudonné, 1969, p. 18-19 ; Schwartz, 1997, p. 163). Schwartz discute précisément le moment où le mathématicien introduit un nouveau mot, une nouvelle définition : c'est lorsque cette propriété revient « toujours ». « Naturellement tout mathématicien doit s'habituer à manipuler un grand nombre de mots nouveaux. Une partie de son travail consiste précisément à concevoir des mots nouveaux, et des notations nouvelles là où cela s'impose », nous explique-t-il, (Schwartz, 1997, p. 165). Concernant cette pratique de la dénomination, Henri Cartan, autre membre fondateur de Bourbaki, se réfère quant à lui non à la pratique des sciences naturelles, mais à celle de la chimie. Il écrit ainsi :

> Bourbaki estimait qu'il était nécessaire de modifier et de simplifier la terminologie afin d'être capable de traiter les mathématiques dans leur ensemble. Ce faisant, il se pliait à la maxime d'un chimiste Suédois d'Uppsala du XVIII^e^ siècle, du nom de Bergman. Lavoisier le cite ainsi : « Ne faites grâce à aucune dénomination

[19] (Schwartz, 1997, p. 163). Rappelons que les distributions sont définies comme des formes linéaires continues sur un certain espace de fonctions, et qu'elles généralisent la notion de fonction.

[20] Ce qui n'est qu'esquissé ici mériterait d'être abordé plus en avant dans les textes mathématiques de Schwartz. La classification ainsi perçue en termes de structures pour les distributions se traduit en premier par les ouvrages qu'il publie : « Théorie des distributions », puis « Théorie des distributions à valeurs vectorielles ». La première fois que Schwartz mentionne les « courants » (dont la première définition est dûe à George de Rham) dans un exposé de mathématiques, il parle de « distributions-forme différentielles ». Voir (Paumier, 2014 ; 2015) sur ce dernier point.

> impropre ; ceux qui savent entendront toujours ; ceux qui ne savent pas encore entendront plus tôt[21] ». (Cartan, 1979/80, p. 179)

Poursuivant sa réflexion, Schwartz indique en outre que l'introduction de nouveaux noms est une simplification qui s'accompagne d'une montée en abstraction (Schwartz, 1997, p. 165-166).

Si la question de la dénomination a donc joué un rôle fort chez Bourbaki, notamment rendue nécessaire par la mise à plat des mathématiques à traiter dans les *Éléments*[22], nous devons souligner qu'elle n'a pas été explicitement mise en relation avec celle de la classification. Nous pourrons toutefois ici les rapprocher en suivant les réflexions de Michel Foucault, présentant l'élaboration de nomenclatures adéquates comme indissociable du processus classificatoire lui-même[23].

Ces quelques éléments permettent donc de revenir sur l'assimilation de Bourbaki au Linné des mathématiques décrite en début de section. La métaphore elle-même pouvait paraître banale, associée à une analyse *a posteriori* par certains auteurs en train de construire l'image de leur groupe. Il n'en reste pas moins que la pratique de la classification semble avoir eu une réelle importance dans le travail de recherche de ces mathématiciens, liée à d'autres enjeux : ici la notion de

---

[21] « Bourbaki considered it necessary to modify and simplify the terminology to be able to treat mathematics as a whole. In doing so, he was following the maxim of an 18th century Swedish chemist of Uppsala named Bergman. Lavoisier quotes him as saying: "Ne faites grâce à aucune dénomination impropre ; ceux qui savent entendront toujours ; ceux qui ne savent pas encore entendront plus tôt". » Cette version anglaise est le fruit de la traduction d'un des textes de Cartan écrit originellement en allemand (Cartan, 1959).

[22] Après avoir expliqué comment Bourbaki a choisi les théorèmes à énoncer à partir de la notion de structure, Dieudonné écrit : « En particulier le choix des définitions, l'ordre suivant lequel sont exposés les sujets ont été décidés uniquement suivant un schéma logique et rationnel ; si cela ne s'accordait pas avec ce qu'on faisait avant, eh bien c'est que ce que l'on faisait avant qui était jeté par dessus bord, sans aucune espèce de ménagement même pour des traditions séculaires. [. . .] Donc B[ourbaki] a purement et simplement aboli cette terminologie, comme beaucoup d'autres. Il en a aussi inventé beaucoup d'autres [. . .] » (Dieudonné, 1969, p. 18).

[23] (Foucault, 1966). Par ailleurs, voir (Rousseau & Morvan, 2000) pour un travail interdisciplinaire sur cette question de la dénomination en sciences. En particulier, faisant écho à ce que nous décrivons, ce volume contient un article sur « La Création des noms mathématiques : l'exemple de Bourbaki » (Cartier & Chemla, 2000).

structure comme objet-étendard, là une pratique de dénomination transversale à différentes sciences.

Nous n'entrerons pas davantage dans les mathématiques de Bourbaki elles-mêmes, mais préférons aborder une autre étude de cas. En décrivant cette fois (entre autres) la technique mathématique de façon plus approfondie, nous verrons que d'autres réflexions au sujet de la classification se présenteront à nous.

Classifications de surfaces cubiques

Nous utilisons pour cela l'exemple de surfaces particulières qui ont été intensément étudiées dans la seconde moitié du XIXe siècle. Il s'agit de surfaces pouvant être définies par une équation polynomiale de degré 3 en les coordonnées x, y, z de l'espace, comme par exemple $x^3 + y^2z + 3xyz + x^2 - 1 = 0$ ou $x^3 + ix^2y - z^3 + (2-3i)y^2 + x + z = 0$, le nombre i étant un nombre complexe tel que $i^2 = -1$. En raison de la valeur de ce degré, ces surfaces sont appelées « surfaces cubiques », « surfaces du troisième degré » ou encore, comme c'était plus souvent le cas au XIXe siècle, « surfaces du troisième ordre ». À cette époque, les mathématiciens prenaient en considération tout aussi bien des surfaces « réelles » que des surfaces « complexes », c'est-à-dire pouvant être définies par une équation à coefficients tous réels ou non, respectivement[24]. De plus, les coordonnées x, y, z étaient généralement vues comme des nombres complexes, que la surface soit réelle ou complexe. Enfin, rappelons que parmi les points d'une surface cubique, il peut exister des « points singuliers », aussi appelés « singularités » : si $F = 0$ est une équation d'une surface, ce sont les points de coordonnées (x, y, z) qui annulent à la fois F et sa différentielle première, c'est-à-dire que $F(x, y, z) = 0$ et $\mathrm{d}F_{(x,y,z)} = 0$.

Un résultat important, démontré en 1849 par les britanniques Arthur Cayley et George Salmon, est que dans toute surface cubique « lisse », c'est-à-dire n'ayant aucun point singulier, sont incluses vingt-sept droites[25]. Ces deux

[24] Ainsi, des deux exemples précédents, le premier est une surface réelle tandis que le second est une surface complexe.

[25] (Cayley, 1849 ; Salmon, 1849). Dire qu'une droite est incluse dans une surface signifie que tout point appartenant à la droite appartient aussi à la surface ; le théorème stipule donc qu'il existe exactement vingt-sept telles droites, incluses dans chaque surface cubique. Au sujet de l'histoire du théorème des vingt-sept droites, et notamment de son rôle dans les dynamiques de rapprochement entre groupes, équations et géométrie, voir (Lê, 2015).

mathématiciens montrèrent en outre que ces vingt-sept droites sont contenues trois à trois dans un même plan. Ils dénombrèrent en tout quarante-cinq tels plans et les baptisèrent « plans tangents triples ». Notons qu'à l'instar des surfaces cubiques, il est possible de faire la distinction entre droites et plans réels ou complexes selon qu'ils peuvent être définis par des équations à coefficients tous réels ou non ; dans le théorème de Cayley et Salmon, il est sous-entendu que parmi les vingt-sept droites, toutes ne sont pas réelles *a priori*, et de même pour les quarante-cinq plans tangents triples.

Une dizaine d'années après ces travaux de Cayley et de Salmon, le mathématicien suisse Ludwig Schläfli consacra aux surfaces cubiques deux articles dans lesquels il proposa deux classifications des surfaces du troisième ordre (Schläfli, 1858 ; 1863). Dans celui de 1858, il s'agit d'une classification des surfaces cubiques réelles et lisses selon le nombre de droites réelles et le nombre de plans tangents triples réels qu'elles peuvent contenir. Le résultat auquel Schläfli aboutit est qu'il n'y a que cinq possibilités pour ces nombres, à savoir $(27,45)$, $(15,15)$, $(7,5)$, $(3,13)$ ou $(3,7)$[26]. Dans les termes de Schläfli, cela donne cinq « espèces » de surfaces lisses du troisième ordre[27].

L'article de Schläfli de 1863 est intitulé « On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of Their Lines ». Comme ce titre l'indique, Schläfli y propose d'établir une classification des surfaces cubiques basée à la fois sur leurs points singuliers éventuels et sur la réalité des vingt-sept droites. En ce qui concerne les singularités, il s'agit de considérer non seulement leur existence éventuelle, mais aussi (dans l'affirmative) d'en établir une typologie. Schläfli discute ensuite, pour chacun des types de singularités trouvés, les possibilités de réalité des droites et des plans tangents triples. Ainsi, le premier cas considéré

[26] L'idée de la démonstration de Schläfli est la suivante. Il s'agit d'abord d'écrire l'équation d'une surface cubique lisse sous la forme $UVW - XYZ = 0$, où $U, V, \dots, Z$ sont des fonctions linéaires en les coordonnées de l'espace. Les différentes possibilités pour les nombres de droites et de plans réels proviennent d'une discussion complète des cas de réalité des fonctions $U, \dots, Z$.

[27] Cet article de Schläfli a été publié en anglais, mais on lit dans son introduction que c'est Cayley qui l'a traduit dans cette langue (probablement depuis l'allemand). En anglais, il s'agit des cinq « species » de surfaces cubiques lisses. Notons que plusieurs mathématiciens ont par la suite utilisé la classification de Schläfli en utilisant encore le terme d'« espèces ». Voir par exemple (Cremona, 1868, p. 116 ; Zeuthen, 1875, p. 1). Cependant, comme dans (Sturm, 1867, p. 281), on trouve aussi l'utilisation du terme allemand « Gattungen », que l'on traduit plutôt par « genres ».

est celui des surfaces lisses, pour lequel Schläfli reprend le contenu de son article de 1858 ; les autres cas correspondent à différents types de singularités, comme par exemple les « nœuds propres » :

> Cette théorie [de la réalité ou non-réalité des droites sur une surface lisse du troisième ordre] est reproduite et développée dans le présent mémoire sous le titre « I. Surface cubique générale du troisième ordre et de la douzième classe[28] » ; mais la plus grande partie du mémoire se rapporte aux formes singulières qui sont ici complètement énumérées pour la première fois, et sont examinées sous les titres II, III, &c. jusqu'à XXII, par exemple « II. Surface cubique avec un nœud propre, et donc de la dixième classe » [...]. Chacune de ces familles est examinée [...] et [...] divisée en espèces selon la réalité ou la non-réalité de ses droites et plans[29]. (Schläfli, 1863, p. 193)

Expliquons brièvement comment est faite la distinction entre différents types de singularités. Si par exemple le point de coordonnées $(0,0,0)$ est singulier, Schläfli montre que la surface auquel il appartient admet une équation de la forme $P(x,y,z)+Q(x,y,z)=0$, où P et Q sont des polynômes homogènes de degrés respectifs 2 et 3. Lorsque P ne peut pas être factorisé en deux termes linéaires, le point singulier est appelé un « nœud propre ». Dans le cas contraire, Schläfli distingue les cas où les facteurs linéaires de P sont distincts ou non. Dans l'affirmative, il montre qu'il est possible de supposer que $P(x,y,z) = xy$; la singularité est alors appelée « nœud biplanaire » si de plus le coefficient devant z^3 dans Q est non nul. La discussion se poursuit ainsi en suivant une disjonction progressive de cas relative à des propriétés de P et Q, ce qui établit la classification.

L'ensemble de tous les cas de la classification est résumé par Schläfli sous la forme d'une liste comportant vingt-deux items correspondant aux vingt-deux familles de surfaces cubiques. Par exemple, pour les familles III à VI, on lit :

---

[28] La « classe » d'une surface (non nécessairement cubique) est le nombre de plans tangents qu'on peut mener depuis un point quelconque de l'espace.

[29] « This theory [as regards the reality or non-reality of the lines on a general surface of the third order] is reproduced and developed in the present memoir under the heading, I. General cubic surface of the third order and twelfth class; but the greater part of the memoir relates to the singular forms which are here first completely enumerated, and are considered under the headings II., III., &c, down to XXII., viz. II. Cubic surface with a proper node, and therefore of the tenth class [...]. Each of these families is discussed [...] and it is further [...] divided into species according to the reality or non-reality of its lines and planes. »

> III. Surface cubique de la neuvième classe avec un nœud biplanaire. Espèces III. 1, 2, 3, 4.
>
> IV. Surface cubique de la huitième classe avec deux nœuds propres. Espèces IV. 1, 2, 3, 4, 5, 6.
>
> V. Surface cubique de la huitième classe avec un nœud biplanaire. Espèces V. 1, 2, 3, 4.
>
> VI. Surface cubique de la septième classe avec un nœud biplanaire et un nœud propre. Espèces VI. 1, 2. (Schläfli, 1863, p. 193-194)[30]

Remarquons que l'article de Schläfli se termine par une remarque écrite par Cayley (le traducteur, rappelons-le) : « Dr. Schläfli a omis de mentionner une forme spéciale de la surface réglée du troisième ordre qui m'est apparue d'elle-même[31]. » Cayley met ainsi en évidence une lacune dans la classification de Schläfli provenant d'un oubli dans la disjonction des cas menée par ce dernier, et la complète en introduisant une nouvelle espèce de surface cubique — Cayley reprendra cette classification complétée dans un long mémoire sur les surfaces cubiques (Cayley, 1869) (voir la figure 3).

Cette intervention de Cayley met en évidence l'importance de la démonstration d'une classification en mathématiques, puisque la complétude de celle-ci est assurée par l'exhaustivité de la disjonction de cas autour de laquelle la preuve est construite. Une classification peut donc faire l'objet de corrections suite à une insuffisance de sa démonstration. Au-delà de l'omission éventuelle de cas, c'est aussi la façon de faire elle-même qui peut être remise en question. Par exemple, revenant en 1979 sur la classification des surfaces cubiques par leurs singularités, les mathématiciens James Williams Bruce et Charles Terence Clegg Wall commentent :

> La classification des surfaces cubiques (complexes et projectives) par leurs singularités ayant été donnée par Schläfli il y a plus d'un siècle, (Schläfli, 1863), on pourra douter qu'il est besoin d'y revenir. Nous avons cependant trouvé que la géométrie n'y était pas présentée de façon particulièrement simple, de même que dans (Cayley, 1869), et que la classification devient plus transparente par

[30] « III. Cubic surface of the ninth class with a biplanar node. Species III. 1, 2, 3, 4. IV. Cubic surface of the eight class with two proper nodes. Species IV. 1, 2, 3, 4, 5, 6. V. Cubic surface of the eight class with a biplanar node. Species V. 1, 2, 3, 4. VI. Cubic surface of the seventh class with a biplanar and a proper node. Species VI. 1, 2. »

[31] « Dr. Schläfli has omitted to notice a special form of the ruled surface of the third order which presented itself to me » (Schläfli, 1863, p. 241).

	I =12.	II =12−C_2.	III =12−B_3.	IV =12−2C_2. V =12−B_4.	VI =12−B_3−C_2. VII =12−B_5.	VIII =12−3C_2. X =12−B_4−C_2. XI =12−B_6. XII =12−U_6.	IX =12−2B_3.	XIII =12−B_3−2C_2. XIV =12−B_5−C_2. XV =12−U_7.	XVI =12−4C_2. XVIII =12−B_4−2C_2. XIX =12−B_6−C_2.	XVII =12−2B_3−C_2. XX =12−U_8.	XXI =12−3B_3.	XXII =S(1, 1). XXIII =S($\overline{1, 1}$).	
n	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	n
a	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	a
δ	0	1	0	2	1	3	0	2	4	1	0	0	δ
κ	6	6	7	6	7	6	8	7	6	8	9	3	κ
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	b
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	k
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t
q	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q
ρ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	ρ
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	j
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h
r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r
σ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	σ
θ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ
χ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	χ
β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	β
γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
C	0	1	0	2	1	3	0	2	4	1	0	0	C
B	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	3	0	B
	I	II	III	IV V	VI VII	VIII X XI XII	IX	XIII XIV XV	XVI XVIII XIX	XVII XX	XXI	XXII XXIII	
n'	12	10	9	8	7	6	6	5	4	4	3	3	n'
a'	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	a'
δ'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ'
κ'	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	3	κ'
b'	27	15	9	7	3	3	0	1	3	0	0	1	b'
k'	216	60	18	12	3	0	0	0	0	0	0	0	k'
t'	45	15	6	3	0	1	0	0	1	0	0	0	t'
q'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q'
ρ'	27	15	9	7	3	3	0	1	3	0	0	1	ρ'
j'	0	0	0	1	0	3	0	1	6	0	0	2	j'
c'	24	18	16	12	10	6	8	4	0	2	0	0	c'
h'	180	96	72	38	24	6	12	2	0	0	0	0	h'
r'	30	24	42	17	24	9	32	5	0	2	0	0	r'
σ'	12	12	12	10	9	6	8	4	0	2	0	0	σ'
θ'	0	0	16	0	8	0	16	0	0	0	0	0	θ'
χ'	0	0	0	0	1	0	0	2	0	2	0	0	χ'
β'	54	30	18	13	6	3	0	1	0	0	0	0	β'
γ'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ'
i'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i'
C′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C′
B′	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	3	0	B′

2 K 2

Figure 3 – Tableau des singularités donné dans (Cayley, 1869, p. 235). Les colonnes représentent les vingt-trois espèces de surfaces cubiques, numérotées en chiffres romains. Les égalités tout en haut du tableau indiquent les singularités caractérisant chaque espèce (par exemple, la classe II est celle comportant un seul point conique simple C_2). Enfin, les lettres disposées à l'extérieur des colonnes désignent des nombres associés aux surfaces : n pour leur ordre, a pour l'ordre (générique) de leur cône circonscrit, δ pour le nombre d'arêtes doubles de ce cône, etc. (Table reproduite par les soins de la Bibliothèque Jacques Hadamard d'après leur exemplaire)

> l'introduction de la terminologie et des techniques de la théorie moderne des singularités[32]. (Bruce & Wall, 1979, p. 245)

Le réexamen de la classification de Schläfli (complétée par Cayley) ne concerne pas ici les divisions en lesquelles elle consistait ; il vise sa substance géométrique, à travers l'utilisation d'un outillage mathématique « moderne » pour sa démonstration.

Cet ancrage historique des points de vue sur une classification peut d'ailleurs se manifester de façon plus radicale, en agissant sur les critères classificatoires eux-mêmes. Ainsi, dans une publication de 1987, Horst Knörrer et Thomas Miller proposent de revenir sur les classifications de surfaces cubiques proposées par Schläfli, mais aussi par Felix Klein et Carl Rodenberg : ces derniers avaient respectivement classifié les cubiques selon leur forme[33] et selon ce qu'on appelle « leur pentaèdre » (Klein, 1873 ; Rodenberg, 1879). Or, d'après H.Knörrer et T. Miller, « non seulement les concepts d'équivalence à la base de ces travaux, mais aussi les méthodes employées pour les classifications ne sont pas formulés assez précisément au vu des standards actuels[34]. » En conséquence de ces remarques, les deux mathématiciens proposent une classification basée sur ce qu'ils appellent le « type topologique » des surfaces et qu'ils annoncent définir précisément. La classification est ainsi réévaluée en fonction des normes et des exigences du travail mathématique d'une époque de rédaction (liées ici au développement de la topologie), allant jusqu'à entraîner une modification des critères mêmes du classement.

On remarquera au passage que de mêmes objets (les surfaces cubiques) peuvent être classés selon des critères *a priori* différents : existence et nature de singularités, forme, pentaèdre, type topologique. Cette diversité ne rend pas les classifications résultantes contradictoires, mais reflète la possibilité d'appré-

---

[32] « Since the classification of (complex, projective) cubic surfaces by their singularities was given by Schläfli, (Schläfli, 1863), over a century ago, the need for a further account may be questioned. We found, however, that the geometry was not particularly simply exposed there or in (Cayley, 1869), and also that the classification is made more transparent by the introduction of terminology and techniques from modern singularity theory. »

[33] Il s'agit ici de la forme d'une surface au sens de son aspect (*Gestalt* en allemand, *shape* en anglais).

[34] « Allerdings sind sowohl die in diesen Arbeiten zugrundegelegten Äquivalenzbegriffe als auch die bei der Klassifikation verwendeten Methoden für heutige Standards nicht präzise genug formuliert. » (Knörrer & Miller, 1987, p. 51).

hender de mêmes objets sous plusieurs points de vue disciplinaires, comme la géométrie ou la topologie[35].

Revenons encore sur les travaux de Schläfli pour illustrer un dernier point. Nous avons pu constater que la classification de ce dernier donne lieu à des divisions successives des surfaces cubiques en familles et espèces, la « classe » de ces surfaces apparaissant comme une des caractéristiques de chaque famille — comme le montre la citation précédente de Schläfli (p. 23), des surfaces cubiques ayant même classe peuvent apparaître dans des familles différentes. La classification des surfaces du troisième ordre se présente donc par classes, familles et espèces, en allant du plus général au plus particulier. À ce stade, on peut remarquer la proximité du vocabulaire avec celui du modèle classique de classification du vivant (et en particulier du monde végétal) hérité de Linné, et impliquant classes, ordres, familles, genres et espèces (du plus général au plus particulier). Deux différences notables se présentent toutefois. La première est que dans la classification de Schläfli, la classe est une sous-division de l'ordre, ce qui est donc inversé par rapport au modèle classique. La seconde est qu'il n'y a pas d'utilisation par Schläfli d'une catégorie de genre, intermédiaire entre celles de famille et d'espèce[36].

Cette ressemblance lexicale, qui n'est pas une stricte analogie, pose à nouveau la question du rapport des mathématiques aux sciences naturelles. Car si dans l'exemple de l'entreprise classificatoire de Bourbaki, ce rapport était explicitement mis en avant par les auteurs eux-mêmes, le cas des surfaces cubiques montre des traces dont le lien aux sciences naturelles est le résultat de notre interprétation[37]. On peut par conséquent se demander s'il s'agit ici d'un

[35] Le problème du pluralisme taxinomique a récemment fait l'objet de commentaires philosophiques à partir de l'exemple de la classification des étoiles (Ruphy, 2013).

[36] Il existe plusieurs notions mathématiques de « genre » pour les surfaces, mais aucune n'est discutée pour les surfaces cubiques par Schläfli. Dans l'exemple de la classification par Gauss des formes quadratiques cité précédemment (Lemmermeyer, 2007), ordre, classe et genre existent, mais l'ordre ne correspond pas non plus à celui des taxons du modèle classique. Notons par ailleurs qu'un autre type de classification de surfaces, proposée philosophe Antoine-Augustin Cournot, est brièvement décrit dans l'article de Jenny Boucard et Christophe Eckes du présent volume. Si cette classification utilise aussi les étiquettes « genres » et « ordre », ces dernières renvoient à d'autres catégories que celles présentées ici.

[37] Tony Crilly a comparé Cayley à un mathématicien naturaliste (et en particulier à un botaniste) dans le cadre de la théorie des invariants, également traversée de questions classificatoires (Crilly, 2006, p. 193-196). Son interprétation repose en grande partie sur

véritable emprunt au modèle de classification du vivant (avec éventuellement un véritable transfert de méthode), ou seulement d'un indice pointant vers une origine terminologique commune. Autrement dit, l'emploi des termes « classe », « ordre », « espèce » et « famille » n'est-il ici que le fruit d'usages en place hérités du passé, ou indique-t-il une réelle identité de démarche, voire plus généralement un point de vue épistémologique fort sur un lien entre mathématiques et sciences du vivant ?

Science(s) et classification(s)

Dans un livre sur l'histoire de la botanique, Jean-Marc Drouin a suggéré de voir cette discipline comme parangon pour une vaste gamme d'entreprises classificatoires de notre passé, tout en soulignant la nécessité de d'analyser avec soin les modalités des transferts disciplinaires en jeu dans ces entreprises :

> Les associations végétales, les maladies, les connaissances humaines, mais aussi les œuvres d'art, les contes populaires, les langues, les émotions, autant d'objets qu'on a tenté de classer *more botanico*. [...] Le recours au modèle des classifications botaniques, quand il n'est pas simplement rhétorique, peut se révéler source de confusion aussi bien que support d'invention. Précisément, ses limites et ses ambiguïtés sont aussi instructives que ses succès. En définitive, le modèle ici n'est pas un modèle à imiter, mais un modèle à observer, à démonter et à analyser. (Drouin, 2008, p. 237)

En guise de conclusion, nous aimerions formuler ici quelques remarques sur ce cadre descriptif pour le cas des classifications mathématiques, en nous basant à la fois sur nos descriptions précédentes et sur d'autres rapides exemples.

Que ce soit dans les discours explicites de mathématiciens ou à travers des traces plus techniques et plus cachées, nous avons vu comment mathématiques et sciences naturelles peuvent effectivement être rapprochées à travers les questions classificatoires. Mais nous avons par ailleurs trouvé des commentaires de mathématiciens du XIX^e^ siècle présentant des analogies avec d'autres disciplines. Ainsi,

---

la description du contexte des sciences à l'époque victorienne, mis en relation avec la pratique mathématique de Cayley, dont son emploi des taxons « genera » et « species ». Il semble toutefois que Cayley n'ait pas établi lui-même d'analogie entre ses façons de faire et celles des naturalistes. L'article de Catherine Goldstein dans ce volume présente le rapprochement entre mathématiques et sciences naturelles décrit explicitement par un mathématicien contemporain de Cayley, Charles Hermite.

décrivant les travaux de son collègue Émile Mathieu relatifs à la classification de groupes de substitutions, Camille Jordan écrit : « Dans ses intéressants Mémoires sur la théorie des substitutions [...], M. Émile Mathieu a émis l'idée de répartir les groupes de substitutions en séries analogues à celles que les chimistes ont signalées parmi les composés organiques. » (Jordan, 1868, p. 229). Si les sciences naturelles et la botanique en particulier ont pu occuper une place de choix autour de ces questions classificatoires, il s'agit donc de ne pas les considérer comme unique modèle de référence pour les mathématiques.

Par ailleurs, soulignons que même dans ces cas où ont été impliquées surtout les sciences naturelles, des transferts disciplinaires réciproques ont également existé — par exemple, J.-M. Drouin a décrit l'intervention du calcul combinatoire dans les travaux de Linné (Drouin, 2008, p. 116-119)[38]. Ces mouvements inverses laissent ainsi envisager des dynamiques du savoir plus complexes que dans le cas d'une simple application d'une modèle naturaliste aux mathématiques.

Quelles que soient les disciplines rapprochées autour de problèmes classificatoires, il s'agit enfin d'étudier la résistance des objets et de ces disciplines aux ponts que leurs praticiens fabriquent, aux passages qu'ils tentent de créer et qu'ils décrivent ensuite[39]. En particulier, il semble qu'il faille bien prendre en compte les spécificités de chaque discipline dans ces examens. Ainsi, dans les exemples mathématiques que nous avons traités, nous n'avons pas vu de réflexions épistémologiques sur le caractère naturel ou artificiel des classifications comme celles qui ont suivi les propositions taxinomiques de Linné. Nous avons cependant constaté à quel point est importante, dans les problèmes classificatoires en mathématiques, la question de la démonstration, autour de laquelle s'articulent des enjeux de points de vue disciplinaires, d'exhaustivité et de compréhension des objets considérés.

La classification des groupes finis simples, vaste entreprise montrant encore une fois l'importance des questions de classification pour les mathématiciens (même actuels), est particulièrement intéressant vis-à-vis de cette question de la démonstration. En effet, le résultat de cette classification peut s'exprimer de

[38] Voir aussi (Foucault, 1966, p. 149) sur l'objectif de Michel Andanson de vouloir « traiter la Botanique comme une science rigoureusement mathématique, et qu'il serait loisible d'y poser des problèmes comme on fait en algèbre ou en géométrie », ou encore la contribution de Maarten Bullynck dans le présent volume, montrant des allers-retours entre mathématiques combinatoires, chimie et botanique.

[39] « Quant à la distance entre ces classifications et celles de la botanique, elle tient avant tout à la différence de nature des objets à classer. » (Drouin, 2008, p. 237).

façon très concise : « Tout groupe fini simple est isomorphe à l'un des groupes suivants : groupe cyclique d'ordre premier, groupe alterné, groupe fini simple de type Lie, ou l'un des vingt-six groupes finis simples sporadiques », mais sa démonstration a été mise en doute ou retravaillée par de nombreux mathématiciens en raison de sa complexité — plus de 10 000 pages développées par une centaine d'auteurs entre 1955 et 1983, suivie d'une seconde génération de preuve jusqu'en 2005. Les enjeux classificatoires se situent donc ici véritablement autour de la preuve, mais se doublent par ailleurs d'un phénomène particulier : c'est le travail de démonstration lui-même, plus que le résultat classificatoire, qui permet aux mathématiciens de développer de nouvelles techniques autour des objets qu'ils classifient, et de mieux les connaître[40].

Les exemples que nous avons décrits ici laissent finalement entrevoir l'existence de nombreuses nuances dans les discours et les pratiques associées à différents problèmes de classifications mathématiques et invitent à analyser finement toutes ces variations. Notamment par la voie de l'interdisciplinarité, nous espérons que les réflexions que nous avons développées dans cet article pourront contribuer à une histoire de la pratique classificatoire prenant en compte les mathématiques, et visant à en comprendre non seulement les modalités, mais aussi plus généralement sa place dans l'activité scientifique elle-même.

Remerciements

Nous tenons à remercier Jenny Boucard, Stéphane Tirard, ainsi que le rapporteur anonyme pour leurs précieuses suggestions ayant permis d'améliorer notre article.

[40] Voir par exemple (Solomon, 1995, p. 239). Là encore, on trouve une référence à Linné : « The classification of finite simple groups is an exercise in taxonomy. This is obvious to the expert and to the uninitiated alike. To be sure, the exercise is of colossal length, but length is a concomitant of taxonomy. Those of us who have been engaged in this work are the intellectual confreres of Linnaeus. Not surprisingly, I wonder if a future Darwin will conceptualize and unify our hard won theorems. [. . .] The Origin of Groups remains to be written, along lines foreign to those of Linnean outlook. » (Thompson, 1984, p. 2), cité par (Steingart, 2012, p. 190-191).

Références

AUBIN David (1997), « The Whitering Immortality of Nicolas Bourbaki: A Cultural Connector at the Confluence of Mathematics, Structuralism, and the Oulipo in France », *Science in Context*, vol. 10, p. 297–342.

BEAULIEU Liliane (1989), *Bourbaki : une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944)*, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

BOURBAKI Nicolas (1940), *Éléments de mathématique. Partie I. Les Structures fondamentales de l'analyse. Livre III. Topologie générale. Chapitres I et II*, Paris, Hermann.

BOURBAKI Nicolas (1948), « L'Architecture des mathématiques », dans François LE LIONNAIS (éd.), *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, Paris, Actes Sud, p. 35–47.

BOURBAKI Nicolas (1970), *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Paris, Hermann.

BOURBAKI Nicolas (1981), *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 4 à 7*, Paris, Masson.

BOYER Carl B. (1956), *History of Analytic Geometry*, New York, Scripta Mathematica.

BRAVERMAN Charles (2015), « La Classification scientifique chez Ampère : entre Bacon et les naturalistes », *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, vol. 140, n° 3, p. 307–324.

BRUCE James Williams & WALL Charles Terence Clegg (1979), « On the Classification of Cubic Surfaces », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 19, n° 2, p. 245–256.

CARTAN Henri (1959), *Nicolas Bourbaki und die heutige Mathematik*, Cologne, Opladen, Westdeutscher Verlag.

CARTAN Henri (1979/80), « Nicolas Bourbaki and Contemporary Mathematics », *The Mathematical Intelligencer*, vol. 2, n° 4, p. 175–180.

CARTIER Pierre & CHEMLA Karine (2000), « La Création des noms mathématiques : l'exemple de Bourbaki », *La Temps des savoirs*, p. 153–170.

CAYLEY Arthur (1849), « On the Triple Tangent Planes of Surfaces of Third Order », *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. 4, p. 118–132.

CAYLEY Arthur (1869), « A Memoir on Cubic Surfaces », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 159, p. 231–326.

CORRY Leo (2001), « Mathematical Structures from Hilbert to Bourbaki: The Evolution of an Image of Mathematics », dans Amy DAHAN & Umberto BOTTAZZINI (éds.), *Changing Images of Mathematics in History. From the French Revolution to the New Millenium*, London, Harwood Academic Publishers, p. 167–186.

CREMONA Luigi (1868), « Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 68, p. 1–133.

CRILLY Tony (2006), *Arthur Cayley: Mathematician Laureate of the Victorian Age*, Baltimore, The John Hopkins University Press.

DIEUDONNÉ Jean (1969), « Regards sur Bourbaki », *Analele Universității din București – Matematica-Mecanica*, vol. 18, nº 2, p. 13–25.

DIEUDONNÉ Jean (1970), « The Work of Nicolas Bourbaki », *American Mathematical Monthly*, vol. 77, p. 134–145.

DIEUDONNÉ Jean (1981), *Choix d'œuvres mathématiques*, Paris, Hermann.

DIEUDONNÉ Jean (1987), *Pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui*, Paris, Hachette.

DROUIN Jean-Marc (2008), *L'Herbier des philosophes*, Paris, Éditions du Seuil.

DUGAC Pierre (1995), *Jean Dieudonné. Mathématicien complet*, Sceaux, Jacques Gabay.

DUMBAUGH FENSTER Della (2007), « Research in Algebra at the University of Chicago: Leonard Eugene Dickson and A. Adrian Albert », dans Jeremy GRAY & Karen Hunger PARSHALL (éds.), *Episodes in the History of Modern Algebra (1800-1850)*, Providence, American Mathematical Society – London Mathematical Society, p. 179–197.

DURIS Pascal (1998), « Sous la bannière linnéenne. Le culte de Linné en France et à l'étranger au XIXe siècle », dans Pnina ABIR-AM (éd.), *La Mise en mémoire de la science : pour une ethnographie historique des rites commémoratifs*, Amsterdam, Édition des archives contemporaines, p. 251–263.

EPPLE Moritz (1999), *Die Entstehung der Knotentheorie: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Wiesbaden, Vieweg.

FERRARO Giovanni (2000), « Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler », *Historia Mathematica*, vol. 27, p. 107–132.

FOUCAULT Michel (1966), *Les Mots et les choses*, Paris, Gallimard.

GISPERT Hélène (1999), « Les Débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'entreprise encyclopédique de Felix Klein et Jules Molk », *Historia Mathematica*, vol. 26, p. 344–360.

GRAILLES Bénédicte, MARCILLOUX Patrice, NEUVEU Valérie & SARRAZIN Véronique (éds.) (2015), *Classer les archives et les bibliothèques : mise en ordre et raisons classificatoires*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes.

HERREMAN Alain (2012), « La Fonction inaugurale de *La Géométrie* de Descartes », *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 18, p. 67–156.

HOQUET Thierry (éd.) (2005), *Les Fondements de la botanique : Linné et la classification des plantes*, Villefranche-de-Rouergue, Vuibert.

JORDAN Camille (1868), « Sur deux nouvelles séries de groupes », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, vol. 67, p. 229–233.

KLEIN Felix (1873), « Ueber Flächen dritter Ordnung », *Mathematische Annalen*, vol. 6, p. 551–581.

KNÖRRER Horst & MILLER Thomas (1987), « Topologische Typen reeller kubischer Flächen », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 195, p. 51–67.

LÊ François (2015), *Vingt-sept droites sur une surface cubique : rencontres entre groupes, équations et géométrie dans la deuxième moitié du XIXe siècle*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris).

LEMMERMEYER Franz (2007), « The Development of the Principal Genus Theorem », dans Catherine GOLDSTEIN, Norbert SCHAPPACHER & Joachim SCHWERMER (éds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin, Springer, p. 527–561.

PAUMIER Anne-Sandrine (2014), *Laurent Schwartz (1915-2002) et la vie collective des mathématiques*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris).

PAUMIER Anne-Sandrine (2015), « Le Séminaire de mathématiques comme lieu d'échanges défini par ses acteurs. Incursion dans la vie collective des mathématiques autour de Laurent Schwartz (1915-2002) », *Philosophia Scientiae*, vol. 19, nº 2, p. 171–193.

POINCARÉ Henri (1902), *La Science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion.

POINCARÉ Henri (1905), *La Valeur de la Science*, Paris, Flammarion.

POINCARÉ Henri (1908), *Science et méthode*, Paris, Flammarion.

POINCARÉ Henri (1913), *Dernières pensées*, Paris, Flammarion.

RASHED Roshdi (2011), *D'al-Khwarizmi à Descartes : études sur l'histoire des mathématiques classiques*, Paris, Hermann.

RODENBERG Carl (1879), « Zur Classification der Flächen dritter Ordnung », *Mathematische Annalen*, vol. 14, p. 46–110.

ROLLET Laurent (1999), *Henri Poincaré, des mathématiques à la philosophie : étude du parcours intellectuel, social et politique d'un mathématicien au début du siècle*, Thèse de doctorat, Université Nancy II.

ROUSSEAU Dominique & MORVAN Michel (éds.) (2000), *Le Temps des savoirs*, vol. 1 : *La Dénomination*.

RUPHY Stéphanie (2013), « La Classification des étoiles : un nouvel allié pour le pluralisme scientifique », dans Soazig LE BIHAN (éd.), *Précis de philosophie de la physique*, Paris, Vuibert, p. 274–294.

SALMON George (1849), « On the Triple Tangent Planes to a Surface of the Third Order », *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. 4, p. 252–260.

SCHLÄFLI Ludwig (1858), « An Attempt to Determine the Twenty-seven Lines upon a Surface of the Third Order and to Divide such Surfaces into Species in Reference to the Reality of the Lines upon the Surface », *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 2, p. 55–65, 110–120.

SCHLÄFLI Ludwig (1863), « On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of Their Lines », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 153, p. 193–241.

SCHWARTZ Laurent (1997), *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Paris, Éditions Odile Jacob.

SOLOMON Ron (1995), « On Finite Simple Groups and their Classification », *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 42, nº 2, p. 231–239.

STEINGART Alma (2012), « A Group Theory of Group Theory: Collaborative Mathematics and the Uninvention of a 1000-page Proof », *Social Studies of Science*, vol. 42, nº 2, p. 185–213.

STURM Rudolf (1867), *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig, Teubner.

THOMPSON John G. (1984), « Finite Non-solvable Groups », dans Karl W. GRUENBERG & James E. ROSEBLADE (éds.), *Group Theory: Essays For Philip Hall*, Boston, Academic Press, p. 1–12.

TOBIES Renate (1994), « Mathematik als Bestandteil der Kultur: Zur Geschichte des Unternehmens *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* », *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte*, vol. 14, p. 1–90.

TORT Patrick (1989), *La Raison classificatoire*, Alençon, Aubier.

ZEUTHEN Hieronymus (1875), « Études des propriétés de situation des surfaces cubiques », *Mathematische Annalen*, vol. 8, p. 1–30.