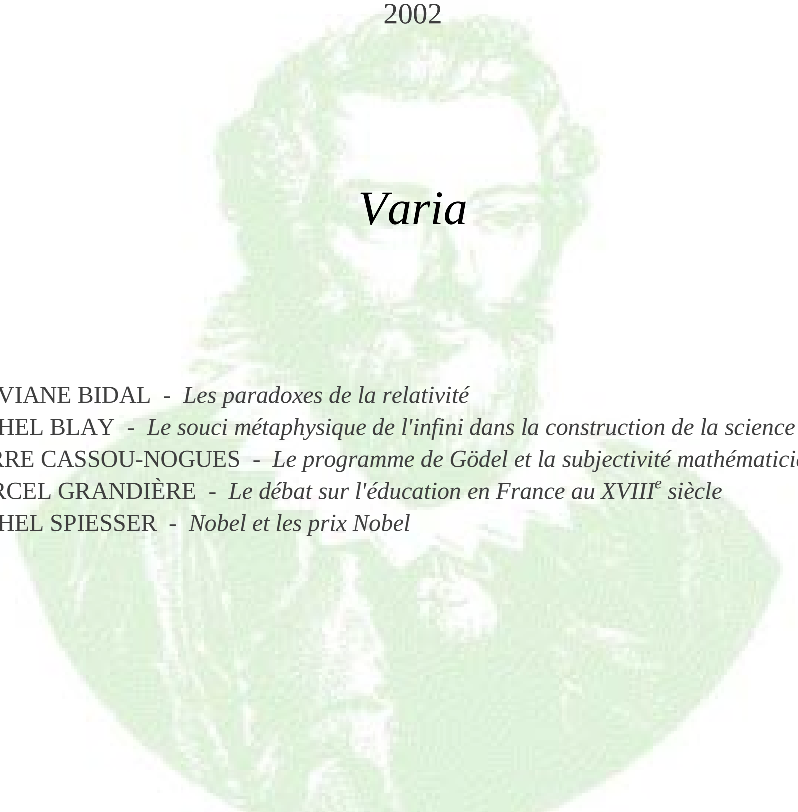
CAHIERS FRANÇOIS VIETE

Série I – N°3

2002



Varia

Centre François Viète
Épistémologie, histoire des sciences et des techniques
Université de Nantes

Achevé d'imprimer sur les presses de l'imprimerie centrale de l'université de Nantes, février 2003
Mise en ligne en juillet 2017 sur www.cfv.univ-nantes.fr

SOMMAIRE

Cahiers François Viète, 3, 2002, 31-55

LE PROGRAMME DE GÖDEL ET LA SUBJECTIVITÉ MATHÉMATICIENNE*

Pierre CASSOU-NOGUÈS

Résumé

Le but de cet article est de mettre en évidence un programme gödelien, faisant suite au programme formaliste. Les théorèmes de 1931, sur l'incomplétude de l'arithmétique élémentaire, marquent l'échec du programme formaliste, tel que Hilbert l'a formulé. Pourtant, Gödel reprend les objectifs hilbertiens : établir le fondement et donner une représentation rationaliste des mathématiques. Ainsi, le logicien lance un véritable programme. Mais, alors que Hilbert entendait éliminer les arguments épistémologiques et transformer le problème du fondement des mathématiques en un exercice mathématique, le programme gödelien passe par une analyse de la subjectivité mathématicienne. Nous distinguons deux modèles de la subjectivité mathématicienne dans ce que nous appelons le programme gödelien.

Nous voudrions suivre le mouvement continu qui va du programme formaliste à ce que nous appelons le programme gödelien. En effet, si les théorèmes d'incomplétude ont rendu caduque le programme formaliste dans la lettre hilbertienne, Gödel reprend à son compte la perspective fondationnelle et le rationalisme de Hilbert. Le logicien lance ce que nous pouvons appeler un programme qui poursuit les mêmes objectifs que le programme formaliste. Néanmoins, après les théorèmes d'incomplétude, le programme gödelien ne peut plus se réduire à un exercice mathématique mais doit passer par une analyse épistémologique. Celle-ci est tournée vers la subjectivité mathématicienne. Chemin faisant, nous nous attacherons à analyser les deux modèles de la subjectivité qui accompagnent le pro-

---

* Conférence donnée le 26 mars 2002 au Centre François Viète. Cet article résume des analyses développées dans Cassou-Noguès ("à paraître-a").

gramme gödelien. Nous commencerons par évoquer la controverse sur le problème des fondements, entre l'intuitionisme de Brouwer et le formalisme de Hilbert, nous analyserons l'impact des théorèmes d'incomplétude et suivrons l'élaboration du programme gödelien en distinguant deux aspects, le fondement et le rationalisme.

1. Le programme de Hilbert et les théorèmes de 1931

Les paradoxes découverts autour de 1900 conduisent les mathématiciens intuitionistes, dirigés par Brouwer, à une critique des raisonnements classiques. En effet, les raisonnements classiques reposent sur des inférences, transfinies, qui ne semblent se justifier que sous l'hypothèse d'une existence actuelle de l'infini. Par exemple, en arithmétique, le tiers exclu permet d'affirmer, P étant une propriété quelconque, que ou bien tous les entiers naturels vérifient la propriété P ou bien il existe un entier qui ne vérifie pas la propriété P. Et, dans un raisonnement par l'absurde, lorsque l'on prouve que l'hypothèse que tous les entiers vérifient P conduit à une contradiction, on déduit l'existence d'un entier ne vérifiant pas P. Pourtant, au moment où l'on affirme l'existence d'un tel entier, on ne peut pas le calculer. En réalité, on suppose que les entiers existent en soi et possèdent des propriétés déterminées, P ou non P, indépendamment des calculs ou, ce qui revient au même, on suppose qu'il serait possible de parcourir en totalité la suite des entiers pour trouver un entier vérifiant non P. Cependant, après les paradoxes, il vaut mieux faire l'économie de ces hypothèses. L'intuitionisme pose que les objets mathématiques n'existent pas en soi mais sont engendrés par la conscience mathématicienne. Celle-ci vit dans le temps. C'est dans le temps qu'elle raisonne et constitue ses objets. Or une inférence transfinie, qui supposerait le parcours achevé d'une collection infinie, ou un processus qui exigerait une infinité d'étapes n'est pas possible dans le temps. Dans le temps, ne se réalisent que des processus finis ou, s'ils se laissent prolonger, indéfinis. Les raisonnements mathématiques doivent pouvoir être vérifiés dans de tels processus, finis ou indéfinis. Les mathématiques classiques, et déjà l'arithmétique élémentaire, outrepassent ces limites. Elles ne constituent qu'un langage vide de contenu et c'est la raison pour laquelle elles donnent lieu à des et c'est la raison pour laquelle elles donnent lieu à des contradictions[1]. L'intuitionisme rejette les mathématiques classiques, dont une conscience temporelle ne peut ni engendrer les objets, ni conduire les raisonnements, et élabore une nouvelle mathématique, dirigée par une nouvelle logique, conforme à l'exigence de constructivité.

Acceptant, pour l'essentiel, la critique intuitioniste du raisonnement mathématique[2], Hilbert reconnaît qu'un raisonnement ne peut être vérifié et ne peut prendre une évidence propre qu'à la condition de ne faire intervenir qu'un nombre fini, quoique illimité, d'étapes ou d'objets. Techniquement, les limites, par lesquelles Hilbert définit le raisonnement "finitiste", sont plus strictes que celles de l'intuitionisme. Mais le but de Hilbert est d'utiliser les raisonnements finitistes pour fonder les mathématiques classiques, qui outrepassent les limites finitistes.

Les mathématiques transfinies seront formalisées et représentées par des manipulations de signes dépourvus de sens. Partant d'une théorie donnée, on commence par faire l'inventaire des signes utilisés, analogue à un alphabet. On donne des règles, analogues à l'orthographe et à la grammaire, pour constituer à partir de ces signes des formules. On donne des axiomes qui serviront de prémisses dans les déductions. On donne des règles pour déduire une formule d'une autre. Ces règles ne s'appliquent qu'aux signes figurant dans les formules et ne prennent pas en considération le sens que pourraient posséder ces signes. Le raisonnement est remplacé par une manipulation de signes. La théorie est remplacée par "un stock de formules", construites et enchaînées selon des règles explicites[3]. Une démonstration se présente comme un dessin conforme à des règles convenues.

Ainsi, Hilbert distingue une mathématique finitiste, dont les raisonnements possèdent une évidence propre mais sont soumis à des restrictions, et une mathématique formelle, qui consiste en manipulations symboliques selon des règles convenues. Il s'agira de démontrer la non contradiction des théories formelles au moyen de raisonnements finitistes. Pour cela,

---

[1] Notamment, Brouwer (1908), p. 20. Sur la temporalité comme condition de possibilité des constructions mathématiques, Brouwer (1913), p. 43-44.

[2] Dans Pierre Cassou-Noguès (2001), nous discutons de façon plus précise la dette de Hilbert envers Poincaré et Brouwer (p. 98-105). Également, Hourya Sinaceur (1994) et (1996).

[3] Hilbert (1926), p. 233.

on raisonnera sur les dessins, qui représentent les démonstrations dans un système formel. Une contradiction se manifesterait par un dessin ayant pour conclusion une ligne de la forme $0 \neq 0$. On analysera les dessins conformes aux règles convenues pour démontrer que de tels dessins ne peuvent pas s'achever sur une ligne comme $0 \neq 0$, en se limitant dans ces raisonnements à des inférences finitistes. Ces raisonnements sur les démonstrations mathématiques constituent une métamathématique. La métamathématique doit donner un fondement à la mathématique : établir, au moyen de raisonnements finitistes, qui, possédant une évidence propre, n'ont pas à être justifiés, que les raisonnements mathématiques s'effectuent sans contradiction. Pour fonder les raisonnements classiques, il n'est pas nécessaire d'affirmer la réalité des collections infinies sur lesquelles ils portent ou de prêter à la conscience mathématicienne la faculté de réaliser des processus transfinis. En fait, le programme formaliste fait de l'infini "quelque chose de purement apparent" que l'on peut utiliser en mathématiques sans lui reconnaître aucune réalité[4].

En outre, la métamathématique semble permettre d'établir une représentation rationaliste des mathématiques. Dès 1900, Hilbert posait en principe la résolubilité de tout problème mathématique. Tout problème mathématique est susceptible d'une solution définitive. Il n'y a donc rien que l'esprit soit condamné à ignorer. "Jamais le mathématicien ne sera réduit à dire *Ignorabimus*"[5]. Ce principe épistémologique peut prendre plusieurs formes logiques. Le plus naturel serait d'établir que, dans un système formel, toute proposition qui peut être formulée peut être ou démontrée ou réfutée. Cette propriété logique, la complétude syntaxique, est mentionnée dans l'article de 1928, "Problèmes de fondation des mathématiques"[6]. Dans l'article de 1926, "De l'infini", Hilbert pose comme un lemme, qui reste à démontrer, la résolubilité finitiste des problèmes arithmétiques : une formule "tout entier vérifie P", P étant une propriété arithmétique, peut être ou démontrée ou réfutée par la donnée d'un contre-exemple[7]. Cela impliquerait la complétude syntaxique. Les deux propriétés

---

[4] Hilbert (1926), p. 222. La traduction française donne "fictif" au lieu de "apparent".

[5] Hilbert (1900), p. 11-12.

[6] Hilbert (1928), Problème III, p. 182.

[7] Hilbert (1926), Lemme I, p. 238. Techniquement, il s'agit de l'élimination de la fonction ϵ.

logiques, complétude syntaxique et décidabilité finitiste, semblent, comme la non-contradiction, être susceptibles d'une preuve métamathématique.

Avant tout, Hilbert, avec son école de Göttingen, tente d'appliquer ce programme à l'arithmétique élémentaire, qui, avec le tiers exclu, fait déjà intervenir le transfini. Le problème des fondements est transformé en un exercice mathématique : établir au moyen de raisonnements finitistes que les systèmes formels qui représentent les théories classiques, arithmétique, théorie des ensembles, possèdent les propriétés logiques de consistance et de complétude syntaxique. Le seul facteur extra-mathématique, dans le programme formaliste, tient à ce qu'il lui faut reconnaître une évidence immédiate aux raisonnements finitistes. Mais ce facteur épistémologique semble négligeable, dans la mesure, d'une part, où les raisonnements finitistes sont plus simples que les raisonnements transfinis de sorte qu'il y a un gain à fonder ceux-là par ceux-ci, dans la mesure, d'autre part, où les mathématiciens critiques et, au premier chef, Brouwer reconnaissent l'évidence immédiate des raisonnements finitistes. Hilbert pouvait espérer prouver la décidabilité des problèmes mathématiques et donner au problème du fondement une solution définitive et dépourvue de présupposés extra-mathématiques[8].

Les deux théorèmes que Gödel donne en 1931 répondent au programme de Hilbert. D'une part, un système, supposé consistant, comprenant l'arithmétique élémentaire, permet de formuler des propositions indécidables, ni démontrables ni réfutables, à partir des axiomes[9]. D'autre part, il est impossible de démontrer la consistance d'un système, supposé consistant, comprenant l'arithmétique élémentaire, au moyen de raisonnements qui se laisseraient exprimer dans le système.

---

[8] Hilbert (1927), p. 163 ; (1928), p. 179.

[9] Techniquement, dans l'article de 1931, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica...*", Gödel utilise l'hypothèse que le système est ω-consistant. Un système est *ω-consistant* s'il est impossible de vérifier une propriété P(n) pour chacun des entiers naturels : P(0), P(1), P(2), etc. et de démontrer la proposition "il existe un entier ne vérifiant pas P" : $\exists n \neg P(n)$. Il n'y a pas contradiction entre les formules P(0), P(1), P(2), etc. et la formule $\exists n \neg P(n)$. Une ω-contradiction n'est pas une contradiction. L'hypothèse de ω-consistance est plus forte que l'hypothèse de consistance. C'est J. B. Rosser qui, en 1936, réussit à remplacer l'hypothèse de ω-consistance par celle de consistance, ce qui donne aux théorèmes leur énoncé usuel.

Commençons par examiner le second théorème. Hilbert voulait établir la consistance de l'arithmétique élémentaire au moyen de raisonnements finitistes. Les raisonnements qu'utilisent Hilbert et son école sont des méthodes arithmétiques simplifiées, qui se laissent formaliser dans l'arithmétique élémentaire. Ils ne sont pas susceptibles d'apporter une preuve de consistance. Néanmoins, il pourrait exister d'autres raisonnements, qui restent finitistes mais ne s'expriment pas dans l'arithmétique élémentaire. Le programme formaliste est suspendu à cette possibilité, que, dans l'article de 1931, Gödel laisse ouverte[10]. En réalité, Hilbert se contentait d'une définition épistémologique du raisonnement finitiste : un raisonnement est finitiste s'il porte sur des objets concrets et peut être vérifié dans l'expérience et dans le temps. Une telle définition ne permet pas de trancher la question de l'inscription des raisonnements finitistes dans l'arithmétique élémentaire. Dans un exposé de 1933, Gödel donne une définition mathématique des raisonnements finitistes et conclut que ceux-ci, s'exprimant dans l'arithmétique élémentaire, ne permettent pas d'en établir la consistance[11].

Pour démontrer la consistance de l'arithmétique, il faudrait développer les raisonnements métamathématiques au-delà des limites qu'indiquait Hilbert. La difficulté est que resurgissent dans le fondement des mathématiques les arguments épistémologiques que Hilbert entendait éliminer. En effet, Hilbert tentait d'assurer la consistance de l'arithmétique par des raisonnements finitistes qui restent plus faibles que l'arithmétique, puisqu'ils se laissent formaliser dans l'arithmétique, et auxquels les mathématiciens s'accordaient à reconnaître une évidence propre. Après les théorèmes de 1931, il faut introduire des inférences qui ne se laissent pas traduire dans l'arithmétique élémentaire et justifier, par des arguments épistémologiques, l'évidence accordée à ces raisonnements "finitistes" et leur primat par rapport aux raisonnements classiques, que l'on prétend fonder. On ne peut plus éliminer les hypothèses qui sous-tendent une théorie, comme celle de l'infini actuel dans l'arithmétique élémentaire. On ne peut que les remplacer par d'autres, qui seront équivalentes d'un point de vue mathé-

---

[10] Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica...*", 1931, dans (1986-95), t. I, p. 194-195.

[11] Gödel, "The present situation in the foundations of mathematics", 1933, dans (1986-95), t. III, p. 51. Également, "Lecture at Zilsel's", 1938, dans (1986-95), t. III, p. 90-91.

matique mais que l'on pourra justifier d'un point de vue épistémologique. Il ne s'agit pas d'une réduction des hypothèses mais d'une reformulation ou d'un déplacement[12]. Dans un texte de 1951, Gödel pose, comme un "principe" général, "la non-éliminabilité du contenu mathématique d'un système axiomatique" [13]. En particulier, pour l'arithmétique élémentaire, il faudra reconnaître, sous une forme ou une autre, la réalité de l'infini. Du coup, une analyse épistémologique réapparaît au centre de ce programme modifié, qui consiste à remplacer des hypothèses pour les justifier par des arguments épistémologiques. Ceux-ci auront pour tâche d'établir, sous une forme ou sous une autre, la réalité de l'infini.

Le programme formaliste ne survit aux théorèmes de 1931 que sous une forme affaiblie et en se complétant d'une analyse épistémologique. Mais, sous cette forme, il est repris par les élèves de Hilbert et par Gödel : "il reste un espoir, écrit celui-ci en 1933, que dans le futur on puisse trouver des méthodes satisfaisantes […] dépassant les limites du système [finitiste de Hilbert] et permettant de fonder l'arithmétique classique et l'analyse. Cette question ouvre un champ de recherches fécond."[14] En 1935, Gentzen donne une première démonstration de la consistance de l'arithmétique élémentaire, au moyen d'une induction sur les ordinaux transfinis de la classe II jusqu'à ε_0, qu'il justifie par une analyse des figures que prend l'infini dans les raisonnements classiques[15]. Dans des exposés de 1938 et de 1941, Gödel passe en revue différentes méthodes pour étendre le finitisme, étudiant la démonstration de Gentzen et esquissant ce qui deviendra le système *Dialectica*[16]. Ainsi, le logicien amorce des recherches sur les fondements de l'arithmétique, liées à sa philosophie des mathématiques et, croyons-nous, à une analyse de la subjectivité mathématicienne.

Parallèlement, le premier théorème de 1931, l'incomplétude, semble mettre en question le rationalisme de Hilbert. Les systèmes formels, qui

---

[12] Gödel, "Lecture at Zilsel's", 1938, dans (1986-95), t. III, p. 112-113

[13] Gödel, "Is mathematics syntax of language?", 1953-1959, dans (1986-95), t. III, p. 345.

[14] Gödel, "The present situation in the foundations of mathematics", 1933, dans (1986-95), t. III, p. 53.

[15] Gentzen (1935). ε_0 est la limite de la suite définie par $u_0=\omega$ et $u_{n+1}=\omega^{u_n}$.

[16] Gödel, "Lecture at Zilsel's", 1938 ; "In what sense is intuitionistic logic constructive?", 1941, dans (1986-95), t. III.

représentent les théories mathématiques, l'arithmétique, la théorie des ensembles, ne sont pas syntaxiquement complets et, par exemple, il existe des problèmes arithmétiques insolubles au moyen des méthodes de l'arithmétique élémentaire. Le théorème d'incomplétude réfute les propriétés logiques par lesquelles Hilbert exprimait le principe épistémologique de la décidabilité des problèmes mathématiques. Cependant, il ne réfute pas ce principe même. On ne peut pas tirer du théorème d'incomplétude l'existence de problèmes mathématiques dépourvus de toute solution mais seulement l'existence de problèmes arithmétiques dépourvus de solution dans l'arithmétique et exigeant un détour par une théorie plus puissante, comme la théorie des ensembles, l'existence de problèmes ensemblistes dépourvus de solution dans la théorie classique et exigeant la position de nouveaux axiomes.

Avec le théorème d'incomplétude, Gödel ne met pas en évidence de propositions indécidables en soi, indécidables pour l'esprit humain mais indécidables par les axiomes d'un système donné, comme l'arithmétique élémentaire. En réalité, le théorème repose sur la construction d'une formule arithmétique, I, dont on montre qu'elle signifie "I n'est pas démontrable". Le raisonnement métamathématique, qui établit l'indécidabilité de la formule I dans l'arithmétique élémentaire, montre, du même coup, que la formule I est vraie, selon une interprétation standard. La formule I pourrait être démontrée dans une métamathématique formalisée. Bref, "la preuve que la proposition I est indécidable est en même temps une procédure de décision, qui, simplement, ne s'exprime pas dans le système initial" et, par conséquent, "la conviction dans la décidabilité des problèmes mathématiques n'est pas affaiblie par ce résultat"[17].

En outre, sachant qu'une formule dont est établie l'indécidabilité doit être vraie, nous pouvons l'ajouter comme axiome au système initial, pour obtenir un système plus puissant qui comportera des indécidables mais, à son tour, pourra être complété. Une telle procédure semble permettre de constituer une série indéfinie de systèmes formant un édifice complet : toute proposition formulée dans l'un des systèmes est décidable, ou démontrable ou réfutable, dans ce même système ou dans un système plus puissant. La difficulté est de fixer la règle qui, à chaque étape, détermine la formule indécidable qui complète le système antérieur. La généralisation

---

[17] Gödel, "Undecidable diophantine propositions", 193 ?, dans (1986-95), t. III, p. 174-175.

qui sera donnée au théorème d'incomplétude à partir des travaux de Turing montrera que, pour que l'édifice soit complet, il faut que la règle, qui gouverne l'extension des mathématiques formelles, ne puisse pas être suivie par une machine, qu'elle ne se réduise pas à une manipulation de signes mais fasse intervenir un élément sémantique.

Gödel peut maintenir le principe hilbertien de la résolubilité des problèmes mathématiques : "à toute question claire que la raison pose, la raison peut trouver une réponse claire"[18]. Si l'on part de ce principe, le théorème d'incomplétude oblige à admettre que la raison humaine surpasse toute machine de Turing et à reconnaître que les mathématiques font intervenir une série indéfinie de systèmes formels[19]. "Il n'existe aucun formalisme qui puisse embrasser toutes les étapes (du développement mathématique), mais il n'est pas exclu que toutes ces étapes (...) puissent être décrites et, pour ainsi dire, rassemblées d'une façon non constructive"[20]. Le problème est de décrire la règle qui détermine l'extension des systèmes et de la justifier en analysant ce qui distingue la raison humaine d'une machine de Turing.

Cependant, le théorème d'incomplétude révèle une autre difficulté dans le programme formaliste. En effet, Hilbert représentait les théories classiques par des systèmes formels, dans lesquels le raisonnement mathématique était remplacé par des manipulations symboliques. Il était supposé qu'un système consistant, comprenant un minimum d'arithmétique, n'admettrait pas de propositions fausses dans leur contenu intuitif. Or c'est ce que le théorème d'incomplétude met en question. La proposition indécidable I, qui signifie "I n'est pas démontrable", est vraie, dans une interprétation standard. Néanmoins, puisqu'elle est indécidable, on pourrait en poser la négation comme axiome. On obtiendrait un système consistant, qui comprend l'arithmétique élémentaire mais comporte des propositions

---

[18] Gödel, "The modern development of the foundations of mathematics...", 1961, dans (1986-95), t. III, p. 381.

[19] Gödel, "Some basic theorems on the foundations...", 1951, dans (1986-95), t. III, p. 308, p. 310. Egalement, Gödel, "The present situation in the foundations of mathematics", 1933, dans (1986-95), t. III, p. 47-48, et la célèbre note de Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica*...", 1931, dans (1986-95), t. I, p. 181, n. 48a

[20] Gödel, "Remarks before the Princeton bicentennial conference ...», 1946, dans (1986-95), t. II, p. 151.

aberrantes[21]. Bref, dans la mesure où les systèmes formels qui représentent les mathématiques classiques comportent des propositions indécidables, il ne suffit pas de s'assurer de leur consistance. Il faut rendre leur sens aux symboles et s'assurer de leur vérité contentuelle. Or, dès lors que l'on rend un sens aux symboles et que l'on considère le contenu des axiomes, on retombe dans les difficultés épistémologiques que dénonçaient les mathématiciens critiques, Borel, Poincaré et Brouwer. En particulier, on ne peut accepter les procédés transfinis utilisés dans les mathématiques classiques, le tiers exclu en arithmétique, les définitions imprédicatives en analyse et l'axiome du choix en théorie des ensembles, qu'à la condition de reconnaître la réalité de l'infini et d'accorder une existence en soi, indépendante des actes, aux objets mathématiques. Ainsi, dans le cas même où l'on donnerait des preuves satisfaisantes pour la consistance des théories classiques, dans le cadre d'un formalisme assoupli, il faudrait revenir à ce platonisme, dont se défendait Hilbert. En 1933, Gödel ne fait que poser le problème d'une réalité mathématique[22]. Dans des textes ultérieurs, Gödel adoptera une position platoniste : "les mathématiques décrivent une réalité non sensible, qui existe indépendamment des actes et des facultés de l'esprit humain, une réalité qui n'est que perçue et, probablement, perçue de façon très incomplète par l'esprit humain"[23]. Tandis que Poincaré, par exemple, refusant d'admettre l'existence en soi des objets mathématiques, rejetait les inférences transfinies des mathématiques classiques, Gödel, acceptant celles-ci, doit reconnaître l'existence en soi des objets mathématiques[24].

Les théorèmes de 1931 montrent qu'il est impossible d'établir le fondement et de donner une représentation rationaliste des mathématiques dans le cadre du programme de Hilbert. Néanmoins, Gödel reprend les deux objectifs de Hilbert et, en cela, lance ce que nous pouvons appeler un

---

[21] Nous reprenons grossièrement l'argument de Gödel, dans "Diskussion zur Grundlegung der Mathematik" 1931, dans (1986-95), t. I, p. 200-201. C'est en développant cet argument que Gödel annonce son théorème d'incomplétude lors d'une conférence à Königsberg en septembre 1930.

[22] Gödel, "The present situation in the foundations of mathematics", 1933, dans (1986-95), t. III, p. 50.

[23] Gödel, "Some basic theorems on the foundations", 1951, dans (1986-95), t. III, p. 323

[24] Notamment, Gödel, "Russell's mathematical logic", 1944, dans (1986-95), t. II, p. 127-128.

programme, qui prolonge celui de Hilbert mais doit trouver de nouvelles formulations et de nouvelles méthodes. En particulier, alors que le programme formaliste fait de l'infini une sorte de fiction et entend se réduire à un exercice mathématique, celui de Gödel repose sur l'hypothèse de l'infini comme réel et passe par une analyse épistémologique, une analyse de la subjectivité mathématicienne.

2. Le rationalisme de Gödel

Le principe hilbertien, de la résolubilité des problèmes mathématiques, pourra être maintenu si les systèmes formels, qui représentent les théories usuelles, s'intègrent dans un édifice complet. Après le théorème de 1931, un tel édifice ne peut consister qu'en une série indéfinie de systèmes déterminés par une loi sémantique, non mécanique. Le problème est de décrire et de justifier cette règle qui gouverne l'extension des systèmes mathématiques.

Considérons la procédure suivante. Supposons que, à chaque étape, est ajoutée comme axiome une formule exprimant la consistance des systèmes antérieurs. En effet, dans le second théorème de 1931, Gödel construit une formule exprimant la consistance du système et montre qu'elle est indécidable, ni démontrable, ni réfutable, dans le système. Partant, par exemple, de l'arithmétique élémentaire, il suffit de poser comme axiome sa consistance, pour obtenir un second système, dont la consistance est indécidable et sera posée comme axiome. Et ainsi de suite. L'extension, indéfinie, des mathématiques vient de ce que, à chaque étape, on reconnaît la consistance des déductions effectuées, et celle-ci, qui ne se déduit pas du système antérieur, constitue un nouvel axiome. L'extension obtenue, à partir de l'arithmétique élémentaire, ne provient que d'une indéfinie réflexion sur les déductions effectuées. Elle ne fait qu'expliciter toujours à nouveau le même postulat : les raisonnements que l'on a conduits jusqu'à présent étaient consistants.

Cette procédure, qui consisterait, à chaque étape, à écrire une formule exprimant la consistance du système antérieur pour l'ajouter aux axiomes, peut être implémentée sur une machine et ne permet pas de constituer une extension complète de l'arithmétique élémentaire. Il faudrait ou bien pouvoir la prolonger dans le transfini[25] ou bien utiliser des formules exprimant, non plus la consistance, mais, en un sens à préciser, la vérité des théorèmes antérieurs[26]. Néanmoins, la procédure initiale illustre l'orientation réflexive dans laquelle peut se faire l'extension de l'arithmétique. Or c'est bien une telle orientation que Gödel semble d'abord avoir en vue : "[Quel que soit le formalisme], la considération de ce formalisme même produit de nouveaux axiomes, qui sont aussi évidents et justifiés que ceux dont vous êtes partis."[27] Il suffit que le mathématicien puisse réfléchir sur le formalisme qu'il utilise, reconnaître la vérité des déductions qu'il a effectuées, leur consistance, et exprimer ces propriétés métamathématiques dans de nouveaux axiomes pour que la mathématique se développe indéfiniment.

C'est également par cette réflexivité que Gödel distingue l'esprit et la machine. Une machine ne peut pas établir la consistance du système dans lequel elle déduit. C'est grossièrement le résultat qu'établit Turing en 1937. En fait, une machine, ou l'esprit conçu comme une machine, "ne peut pas se comprendre lui-même", "ne peut pas comprendre son propre mécanisme", en ce sens qu'il ne peut pas reconnaître que ses déductions restent consistantes et aboutissent à des résultats corrects et, par exemple, applicables à la nature[28]. Or c'est par là que l'esprit se distingue de la machine : "lorsque l'on parle de l'esprit comme d'une machine, on entend une machine qui se reconnaît être correcte (*a machine that recognizes itself as right*)."[29]

Dans cette perspective, l'esprit serait une machine universelle, capable de déduire dans tout système, couplée à un dispositif réflexif, qui éta-

---

[25] Dès 1939, Turing définit, pour remédier à l'incomplétude des formalismes, des procédures de ce type, mais transfinies, produisant des systèmes superposés, coordonnés aux nombres ordinaux, et obtient des résultats pour la décidabilité de certaines classes de formules arithmétiques. *Cf.* Turing (1939), également Salomon Feferman (1988).

[26] Salomon Feferman a travaillé sur de telles extensions de l'arithmétique élémentaire, sans obtenir de résultats de complétude (S. Feferman (1991). Également, Salomon Feferman (1998)).

[27] Gödel, "Remarks before the Princeton Bicentennial conference...", dans (1986-95), t. II, p. 151.

[28] Gödel, "Some basic theorems on the foundations...", 1951, dans (1986-95), t. III, p. 310.

[29] Gödel, cité dans Wang (1996), p. 189.

blit les propriétés métamathématiques des déductions effectuées, consistance, vérité, et utilise ces propriétés dans des axiomes pour de nouvelles déductions. A chaque étape de son développement, l'esprit est analogue à une machine, déduisant dans un système. Mais, contrairement à la machine, l'esprit "se comprend lui-même" et cette auto-compréhension engage un développement indéfini. La différence entre l'esprit et la machine résiderait dans cette réflexivité et la possibilité de cet indéfini développement. Si les termes et les états internes, dont dispose l'esprit restent finis, comme ceux d'une machine, ils convergent vers l'infini dans l'extension des mathématiques : "Ce que Turing a négligé [en identifiant l'esprit à une simple machine], c'est que l'esprit, en pratique, n'est pas statique mais en développement permanent"[30].

Nous pouvons interpréter de deux façons différentes la position de l'esprit comme machine réflexive. Ou bien le point de départ est la reconnaissance, quasi phénoménologique, des deux composantes de l'esprit : la composante déductive, qui n'est que mécanique, la composante réflexive, qui reconnaît les propriétés métamathématiques des déductions effectuées. Et, de cette analyse de la subjectivité mathématicienne, se déduit l'extension indéfinie des systèmes formels et la possibilité, qui reste ouverte, de constituer un édifice complet, vérifiant le principe de la décidabilité des problèmes mathématiques. Ou bien le point de départ est le principe de la décidabilité des problèmes mathématiques, posé comme postulat épistémologique, exigeant une extension indéfinie des systèmes formels et dont l'esprit comme machine réflexive n'est que le corrélat, la traduction subjective. Selon cette seconde interprétation, le cheminement de Gödel est à l'inverse de celui de Descartes. En effet, selon la tradition, Descartes appuie la vérité, des mathématiques et des sciences de la nature, sur le "Je pense donc je suis". La conscience, qui permet d'affirmer "Je pense", fonde l'être de la subjectivité, "Je suis", et, dans la mesure où l'existence de Dieu s'en déduit, le "Je suis" fonde la vérité mathématique. Or reprenons le chemin qui semble conduire Gödel à la position de l'esprit comme machine réflexive. Nous commençons par décrire un édifice mathématique. Nous concevons une machine réflexive, une machine à déduire couplée à un dispositif réflexif, qui reconnaît les propriétés métamathématiques et, en particulier, la vérité des déductions effectuées et les affirme

---

30 Gödel, "Some remarks on the undecidability results", 1972, dans (1986-95), t. III, p. 306.

dans de nouveaux axiomes pour de nouvelles déduction. Une telle machine serait capable de développer un édifice complet. Nous concluons que nous sommes de telles machines. L'idée de vérité détermine notre description de l'édifice mathématique et de la machine réflexive, à laquelle, finalement, nous nous identifions. Ici, la conscience est un effet de miroir : c'est en voyant dans l'édifice mathématique fonctionner la machine réflexive que nous nous apercevons être cette machine réflexive et que nous prenons conscience de nous-mêmes. Bref, si Descartes va de la conscience, à la subjectivité et à la vérité mathématique, Gödel irait de la vérité mathématique, à la subjectivité et à la conscience.

Nous avons, avec cette machine réflexive, un premier modèle de la subjectivité mathématicienne, justifiant l'objectif d'une représentation rationaliste de l'édifice mathématique. Pour un esprit de ce genre, tout problème, en mathématiques, peut admettre une solution. Néanmoins, à propos de la théorie des ensembles, Gödel modifie, ou approfondit, son épistémologie. Il proposera un deuxième modèle de la subjectivité mathématicienne, dans la tradition cartésienne[31].

En 1938, Gödel établit la non contradiction de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix avec les autres axiomes de la théorie des ensembles[32]. On ne peut pas réfuter l'hypothèse du continu, dans la théorie usuelle, et Gödel conjecture qu'on ne peut pas non plus la démontrer, de sorte que l'hypothèse du continu est indécidable dans la théorie usuelle. Cette conjecture sera vérifiée en 1963 par P. Cohen.

En 1939, Gödel considère l'hypothèse du continu, indécidable dans la théorie des ensembles formalisée par Zermelo ou par Bernays, comme une proposition “absolument” indécidable et, par conséquent, comme un problème sans solution pour l'esprit humain[33]. Dans les textes ultérieurs, Gödel reconnaît l'existence d'une réalité mathématique, indépendante de nos théories, et admet que l'hypothèse du continu, exprimant une relation déterminée entre des objets de la réalité mathématique, possède une valeur de vérité. L'indécidabilité de l'hypothèse du continu n'est que le signe de

---

[31] Nous passons plus rapidement sur cette deuxième analyse, que nous avons déjà évoquée dans Cassou-Noguès (“à paraître-b”).

[32] Gödel, “The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis”, 1938, dans (1986-95), t. II.

[33] Gödel, “Lecture at Göttingen”, 1939, dans (1986-95), t. III, p. 154-155 ; “Brown University lecture”, 1940, dans (1986-95), t. III, p. 185.

l'insuffisance de la théorie usuelle[34]. Il s'agit d'étendre les axiomes de la théorie des ensembles pour donner une réponse au problème du continu.

Gödel isole deux critères pour l'adoption de nouveaux axiomes. Le premier est la fécondité de l'axiome. La vraisemblance d'un axiome sera mesurée à ses applications : conséquences vérifiables au moyen d'axiomes reconnus évidents ou simplification dans des démonstrations connues. Ce premier critère, qui est en quelque sorte inductif, rapproche les mathématiques de la physique. En effet, les deux sciences, mathématique et physique, décrivent une réalité, indépendante de l'esprit, et ces axiomes, posés au nom de leur fécondité et au regard de leurs applications, sont analogues aux théories physiques, dont on ne fait que vérifier les conséquences observables.

Le deuxième critère est l'évidence de l'axiome, reconnue dans une réflexion phénoménologique sur la perception que nous avons des objets mathématiques. Les objets mathématiques existent en soi mais sont présentés dans une intuition, analogue à l'intuition sensible et qui se laisse ressaisir par coïncidence à soi. Or c'est, finalement, à la réflexion phénoménologique que Gödel en appelle pour justifier les axiomes et produire des systèmes, non plus "probables", mais "évidents" [35]. En effet, la formulation des axiomes dépend d'une clarification du sens des objets mathématiques. Or la phénoménologie de Husserl constitue, selon Gödel, une méthode systématique pour cette clarification du sens[36].

Ainsi, une réflexion phénoménologique intervient dans la découverte des axiomes et, de façon générale, dans le progrès scientifique. Gödel distingue deux directions, transversales, dans le développement de la pensée d'un enfant, par exemple. La première direction explore le monde extérieur, au moyen des organes sensoriels, puis d'instruments techniques. La seconde est un retour réflexif, qui interroge les concepts impliqués dans une activité antérieure. La science empirique et la technologie proviennent d'un progrès systématique dans la première direction. En revanche, la ma-

34 Gödel "What is Cantor's continuum problem?", 1947, dans (1986-95), t. II, p. 181; 1964, dans (1986-95), t. II, p. 260 et p. 258.

35 Sur la "probabilité" des axiomes issus de la méthode inductive : Gödel, "What is Cantor's continuum problem?", 1947, dans (1986-95), t. II, p. 182 ; 1964, dans (1986-95), t. II, p. 261.

36 Gödel, "The modern development of the foundations...", 1961, dans (1986-95), t. III, p. 382-383.

thématique semble se développer dans la seconde direction, par réflexions successives sur une activité primitive et sur les concepts qui y sont impliqués. C'est par réflexion sur son activité, sur ses actes antérieurs, que l'esprit mathématicien découvre de nouveaux axiomes et réalise une extension des théories, au-delà des possibilités d'une machine : “dans l'établissement systématique des axiomes mathématiques, de nouveaux axiomes, qui ne découlent pas formellement des précédents, deviennent évidents (...). C'est ce devenir évident de nouveaux axiomes, sur la base du sens des notions primitives, qu'une machine ne peut pas imiter.”[37]

Les méthodes, inductive et phénoménologique, qui dirigent l'extension d'une théorie, en garantissent également les fondements : "Pour ces axiomes, il n'existe pas d'autre *fondation rationnelle* si ce n'est qu'ils (...) sont directement perçus comme étant vrais (...) ou qu'ils sont admis (comme des hypothèses physiques) à partir d'arguments inductifs (...)”[38]. Néanmoins, les axiomes, posés par la méthode inductive, restent probables alors que les axiomes, tirés de la réflexion phénoménologique, deviennent “évidents” et sont “perçus comme vrais”

Finalement, Gödel semble donner à la réflexion phénoménologique, qui fournit des axiomes, non probables mais évidents, la double tâche de la découverte et de la justification, de l'extension et de la fondation des théories. A propos de la théorie des ensembles, Gödel décrit la méthode, qui dirige l'extension indéfinie des théories mathématiques, comme une réflexion sur notre intuition. La subjectivité, qui sous-tend le développement de l'édifice mathématique, n'est plus une machine “qui se sait être correcte” et dont la réflexion ne consiste qu'à reconnaître et à affirmer les propriétés métamathématiques des déductions antérieures. La subjectivité mathématicienne est la conscience de la phénoménologie, capable de réfléchir ses actes, capable de saisir ses vécus dans une sorte “d'auto-illumination intérieure”[39].

---

[37] Gödel, “The modern development of the foundations...”, 1961, dans (1986-95), t. III, p. 384-385. “Is mathematics syntax of language”, 1953/59, dans (1986-95), t. III, p. 349.

[38] Gödel, “Is mathematics syntax of language?”, 1953-59, dans (1986-95), t. III, p. 346-347. Nous soulignons.

[39] Nous reprenons une expression de Cavaillès (1947), p. 3

3. Le fondement de l'arithmétique

Finalement, Gödel place le fondement des théories classiques dans une réflexion phénoménologique sur l'intuition des objets mathématiques. Cette réflexion doit permettre de clarifier le sens des objets et de justifier les axiomes mathématiques. Le fondement des mathématiques relève d'une analyse épistémologique. Néanmoins, partant d'une théorie quelconque, il reste à donner aux hypothèses qui la sous-tendent, l'infini actuel de la suite des entiers, une formulation qui se prête à cette justification épistémologique. Cela exige un travail technique. Gödel procède à des traductions de l'arithmétique classique dans d'autres systèmes : dès 1933, traduction de l'arithmétique classique dans l'arithmétique intuitioniste[40]; traduction de l'arithmétique intuitioniste, et de l'arithmétique classique, dans le système dit *Dialectica*, exposée pour la première fois en 1941, publiée en 1958 et remaniée en 1972[41]. Nous verrons que le système *Dialectica* reflète l'épistémologie mise en place à propos de la théorie des ensembles.

Hilbert espérait fonder l'arithmétique élémentaire avec une preuve finitiste de consistance. Les théorèmes de 1931 établissent qu'il est impossible de prouver la consistance de l'arithmétique au moyen de raisonnements qui s'expriment dans l'arithmétique. En 1933, Gödel montre que les raisonnements finitistes s'expriment dans l'arithmétique. La seule solution est d'étendre les raisonnements métamathématiques au-delà des limites finitistes qu'indiquait Hilbert. Mais il faut justifier cette extension et montrer, par des arguments épistémologiques, la légitimité des raisonnements utilisés dans le fondement des mathématiques. C'est ce que tentait Gentzen dans sa preuve de consistance, dès 1935. La même préoccupation guide Gödel.

En 1933, Gödel traduit l'arithmétique classique dans l'arithmétique intuitioniste de telle sorte qu'une formule démontrable, dans l'arithmétique classique, se traduit par une formule démontrable de l'arithmétique intuitioniste et qu'une contradiction dans l'arithmétique classique se traduirait par une contradiction dans l'arithmétique intuitioniste. Brouwer refusait

---

[40] Gödel, "Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie", 1933, dans (1986-95), t. I.

[41] Gödel, "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", 1958, dans (1986-95), t. II.

l'usage du tiers exclu et ouvrait une nouvelle arithmétique, soumise à une exigence de constructivité et justifiée par une analyse de la conscience temporelle. La traduction dans l'arithmétique intuitioniste pourrait constituer un fondement pour l'arithmétique classique. Selon Gödel, ce n'est pas le cas. La possibilité d'une telle traduction ne fait que manifester l'insuffisance des critiques intuitionistes au niveau de l'arithmétique[42]. Gödel distingue deux difficultés dans la critique et l'arithmétique intuitionistes. La première vient de l'absurdité, la négation intuitioniste, qui s'applique aux propositions universelles. Dans l'arithmétique intuitioniste, on peut affirmer, pour une équation comme $n^2=n^3+1$, que ou l'équation est vérifiée par tous les entiers ou cette hypothèse est absurde, c'est-à-dire conduit à une contradiction. Or, dans cette disjonction, le deuxième terme joue le rôle des propositions d'existence dans le tiers exclu classique : ou l'équation est vérifiée par tous les entiers ou il existe un entier ne vérifiant pas l'équation. On pourra traduire les propositions d'existence de l'arithmétique classique par des propositions d'absurdité dans l'arithmétique intuitioniste. Cela montre que la critique intuitioniste du tiers exclu est inefficace. Pour obtenir un système constructif, en réalité, il faudrait franchir un pas supplémentaire et éliminer ces propositions d'absurdité, par lesquelles on traduit les propositions d'existence classiques. Autrement dit, il faudrait interdire la négation des propositions universelles ou ne lui donner sens que dans la mesure où l'on a calculé un contre-exemple[43].

L'équivalence entre l'arithmétique classique et l'arithmétique intuitioniste manifeste l'insuffisance de la critique intuitioniste du tiers-exclu. L'intuitionisme a reformulé l'arithmétique classique, sans éliminer les considérations transfinies qui la sous-tendent. Pour Gödel, les restrictions qu'impose l'intuitionisme par rapport au raisonnement classique ne deviennent efficaces qu'en analyse, avec l'interdiction des définitions imprédicatives[44].

---

[42] Gödel, "The present situation in the foundations ...", 1933, dans (1986-95), t. III, p. 53 ; "In what sense is intuitionistic logic constructive?", 1941, dans (1986-95), t. III, p. 190.

[43] Gödel "The present situation in the foundations ..."1933, dans (1986-95), t. III, p. 51.

[44] Gödel, "Zur intuitionistischen Arithmetik...", 1933, dans (1986-95), t. I, p. 294-285 ; "The present situation in the foundations ...", 1933, t. III, p. 53

En fait, cette première difficulté est le signe d'une deuxième, plus grave. La logique intuitioniste fait problème dans son principe même. L'intuitionisme part d'une exigence de constructivité : on ne reconnaît que des opérations que l'on peut accomplir et des objets que l'on peut construire à partir des entiers ; on n'affirme que des propositions que l'on peut prouver. Ainsi, Heyting est conduit à fixer le sens des connecteurs de la logique intuitioniste en se référant aux déductions et aux conséquences possibles d'une proposition. Par exemple, p implique q, signifie, en logique intuitioniste, qu'il existe une déduction de q à partir de p. L'absurdité de p, qui tient lieu de négation, signifie que l'on peut déduire une contradiction de p. Cependant, les déductions, auxquelles Heyting renvoie pour fixer le sens des connecteurs, ne sont pas des dérivations à l'intérieur du système formel mais des raisonnements quelconques dans un univers mathématique[45]. La logique intuitioniste suppose données, et formant une totalité bien définie, les preuves et les conséquences possibles d'une proposition dans l'univers mathématique. Elle semble reposer sur un cercle imprédicatif, puisque, en s'appuyant sur la totalité des preuves, elle définit un système formel et de nouveaux moyens de preuve. La logique intuitioniste repose sur une totalité transfinie, celle des preuves. L'intuitionisme ne respecte pas le principe de constructivité. C'est pourquoi son arithmétique se révèle aussi problématique que l'arithmétique classique[46].

La traduction dans l'arithmétique intuitioniste ne suffisant pas à fonder l'arithmétique classique, Gödel propose une seconde traduction de

---

[45] En effet, dans un autre article de 1933, Gödel traduit la logique intuitioniste, le calcul propositionnel, dans un système classique auquel est ajouté un connecteur unaire B, signifiant "être prouvable" et caractérisé par trois axiomes : $Bp \rightarrow p$, $Bp \rightarrow (B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq)$, $Bp \rightarrow BBp$. Gödel exprime les connecteurs intuitionistes au moyen de ce B. Or ce B s'interprète comme un "être prouvable" dans l'univers mathématique mais ne peut pas s'interpréter comme "être prouvable" dans un système donné, si celui-ci comprend l'arithmétique élémentaire. Car on déduit la formule $B(Bp \rightarrow p)$, qui signifierait, pour p : $(0 \neq 0)$, que l'on prouve à l'intérieur du système $B(0 \neq 0) \rightarrow (0 \neq 0)$ et $\neg B(0 \neq 0)$, la consistance du système, ce que le théorème de 1931 interdit. *Cf.* Gödel, "An interpretation of the intuitionistic propositional calculus",1933, dans Gödel (1986-95), t. I, p. 302-303.

[46] Gödel, "The present situation in the foundations ...", 1933, t. III, p. 53 ; "Lecture at Zilsel's",1938, dans (1986-95), t. III, p. 100-101 ; Gödel, "In what sense is intuitionistic logic constructive?", 1941, dans (1986-95), t. III, p. 190.

l'arithmétique intuitioniste et, indirectement, de l'arithmétique classique dans le système *Dialectica*. Le système tire son nom de la revue dans laquelle paraît l'article de 1958, "Sur une extension des mathématiques finitistes qui n'a pas encore été utilisée". Le problème est de fonder et, pour cela, de traduire l'arithmétique dans un système qui dépasse le finitisme mais dont on puisse justifier les hypothèses. Cette extension, à partir du finitisme, dépend d'une analyse épistémologique. Or Hilbert, se référant à Kant, soutenait que les raisonnements finitistes, qui possèdent une évidence immédiate, portent sur "objets concrets", des objets donnés dans une expérience, une intuition sensible[47]. Ces objets sont, dans l'arithmétique finitiste, des séries de bâtons tracés sur une feuille de papier, qui figurent les entiers, et, dans la métamathématique, les assemblages de signes qui forment les dessins de démonstration. Gödel refuse cette clause qui rapporte le raisonnement à des objets concrets. L'extension, à partir du finitisme, sera obtenue par l'introduction de "concepts abstraits", de "concepts du deuxième ordre ou plus" qui ne représentent pas les propriétés des objets concrets mais celles "des productions mentales", "des structures", "des contenus de pensée", qui interviennent dans nos opérations sur les objets concrets[48]. Cette extension doit se comprendre dans l'épistémologie qu'a développée Gödel à propos de la théorie des ensembles. D'une part, les objets "abstraits", de la réalité intelligible, ont la même évidence et sont donnés dans une intuition de même nature que les objets "concrets", de la réalité sensible. Gödel peut donc refuser de réduire la mathématique intuitive à la manipulation d'objets concrets et intégrer des objets abstraits dans l'extension qu'il se propose de la mathématique finitiste. D'autre part, le logicien distinguait deux directions dans le progrès de la pensée, l'une qui poursuit une exploration du monde extérieur, l'autre qui revient sur nos opérations primitives pour dégager les concepts qui y sont impliqués. Le progrès et, maintenant, le fondement des mathématiques dépendent de ce retournement réflexif. En effet, les objets "abstraits", dont il est question, ne représentent pas les propriétés des objets concrets, qui intervenaient dans l'arithmétique finitiste, mais celles de nos constructions mentales, de nos contenus de pensée. Si, pour fonder l'arithmétique, il est nécessaire de dépasser le finitisme de Hilbert, il faut tirer des opérations finitistes de

---

[47] Hilbert, "De l'infini", p. 232

[48] Gödel, "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", 1958, t. II, p. 240-241 ; 1972, t. II, p. 272-273.

nouveaux concepts, qui constituent des objets abstraits mais dont on peut faire une mathématique intuitive. En fait, l'arithmétique finitiste, telle que la caractérisait Gödel, consistait en procédures de calcul sur les entiers naturels. Mais on peut saisir pour lui-même ce concept de calculabilité et, en le considérant comme une notion intuitive, s'y appuyer pour donner un fondement à l'arithmétique.

Nous ne discuterons pas de la technique que Gödel utilise pour la traduction de l'arithmétique intuitioniste. Les objets du système, que Gödel note T, sont des fonctions calculables de type fini, des fonctions calculables qui ont pour arguments et pour valeurs des entiers ou des fonctions de type plus simple[49]. L'arithmétique, à travers cette traduction, se trouverait fondée sur une hiérarchie de fonctions calculables. Il faut admettre que celles-ci forment un domaine fixé et bien déterminé. Or la définition des fonctions calculables de type fini fait problème. Gödel adopte deux stratégies différentes, dans l'exposé de 1941 et dans l'article de 1958, remanié en 1972.

Dans ce premier exposé, les fonctions, qui constituent les objets du système, sont définies par la donnée de schémas explicites[50]. Il faut alors vérifier que les fonctions, de différents types, définies par ces schémas sont calculables. Gödel indique deux démonstrations possibles[51]. La première

---

49 Les entiers forment le type 0. Le type 1 ou (0, 0) est constitué de fonctions, qui associent un entier à un entier. Une fonction, qui associe un entier à une fonction de type 1, est de type 2 ou ((0,0), 0). Plus généralement, deux types t_1 et t_2 étant définis, une fonction qui associe un objet de type t_1 à un objet de type t_2, est de type (t_2, t_1).

L'idée, grossièrement, est de coordonner les formules intuitionistes à des énoncés de la forme :

$\exists f_1 \dots \exists f_n \forall g_1 \dots \forall g_m R(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$, où les f_i, g_i, sont des fonctions calculables de type fini et R est une relation décidable. L'énoncé coordonné à une formule démontrable est vérifié par la donnée de termes $a_1, \dots, a_n$ tels que $\forall g_1 \dots \forall g_m R(a_1, \dots, a_n, g_1, \dots, g_m)$. Une contradiction dans l'arithmétique intuitionisme signifierait que les fonctions calculables, $g_1, \dots, g_m$, vérifient deux relations contradictoires.

50 Gödel, "In what sense is intuitionistic logic constructive?", 1941 t. III, p. 194-195.

51 Gödel, "In what sense is intuitionistic logic constructive?", 1941, t. III, p. 195 et l'introduction de A. Troelstra, p. 188-189.

utiliserait les axiomes de l'arithmétique, que l'on veut fonder, et doit être écartée. La deuxième fait intervenir une induction sur le segment $(0,\epsilon_0)$ de la classe II des ordinaux. Gentzen utilisait la même induction dans sa démonstration de consistance, de 1935. L'arithmétique apparaît fondée sur une induction transfinie.

Dans l'article de 1958 et la version remaniée de 1972, Gödel part de la notion de procédure calculable, sur quelque objet que ce soit, en la considérant comme une notion primitive, "immédiatement intelligible"[52]. Il renvoie, pour justifier l'intelligibilité de la notion de procédure calculable, à l'analyse de Turing. Turing a donné une définition de la calculabilité, sur les entiers, qu'il justifiait en analysant la façon dont on conduit un calcul. Mais, soutient Gödel, il faut que la notion de procédure calculable, sur les entiers ou sur quelque objet que ce soit, ait été intelligible avant la définition de Turing, pour que la question de l'adéquation de celle-ci se pose. Loin d'introduire un nouvel objet au moyen d'une définition arbitraire, Turing fixe le contenu mathématique d'une notion intuitive, qui préexistait à sa définition, bien que n'étant perçue que de façon indistincte[53]. Or, à partir de la notion de procédure calculable, considérée comme notion primitive, Gödel peut définir les fonctions du système sans introduire les schémas de 1941 et l'induction transfinie qui les justifie.

La question reste de savoir si la traduction dans le système *Dialectica* donne un fondement satisfaisant à l'arithmétique élémentaire. Cela revient à demander si la hiérarchie des fonctions calculables de type fini forme une totalité bien définie. La difficulté est que les fonctions calculables de type fini et, déjà, les fonctions calculables sur les entiers, de type 1, ne peuvent pas être engendrées dans une procédure uniforme. Techniquement, c'est par là que le système, dans lequel est traduit l'arithmétique, transgresse les clauses qui définissent la mathématique finitiste[54]. La hiérarchie des fonctions calculables échappe à la pensée constructive et doit être supposée exister en soi et être délimitée, indépendamment de nos constructions. En fait, elle est supposée fixée par la notion intuitive de

---

[52] Gödel "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes" 1958, t. II, p. 244-245 ; 1972, t. II, p. 275.

[53] *Cf.* Lettre à H. Wang, citée dans Wang (1974), p. 12.

[54] *Cf.* Gödel, "The present situation in the foundations ...", t. III, p. 51 ; "Lecture at Zilsel's",1938, t. III, p. 90-91.

procédure de calcul. Il faudrait donc admettre une intuition de ce que c'est qu'une procédure calculable, indépendamment de ses objets. Cette intuition deviendrait alors le fondement de l'arithmétique.

La traduction dans l'arithmétique intuitioniste revient à fonder l'arithmétique classique sur la notion de prouvabilité. La traduction *Dialectica* revient à fonder l'arithmétique classique sur la notion de calculabilité, appliquée à des fonctions de type arbitraire. La question serait de savoir si cette notion de calculabilité constitue un fondement adéquat pour l'arithmétique élémentaire. Les révisions successives auxquelles Gödel a soumis son texte semblent indiquer qu'il n'a pas de réponse satisfaisante à cette question épistémologique.

Quoi qu'il en soit, la perspective dans laquelle Gödel veut fonder l'arithmétique correspond à l'épistémologie développée à propos de la théorie des ensembles. La mathématique finitiste consistait en manipulations réglées sur des objets concrets, des bâtons tracés sur une feuille de papier et figurant les nombres entiers. Le système que décrit Gödel pour fonder l'arithmétique représente une extension de la mathématique finitiste grâce à la thématisation d'un concept abstrait, la calculabilité, dégagé par réflexion sur les opérations finitistes. Le progrès, en mathématiques, passe par une conversion réflexive, qui, plutôt que de poursuivre une activité sur des objets concrets, se retourne sur cette activité et dégage les concepts qui y interviennent. Les objets abstraits, qui se constituent alors, ont la même évidence que les objets concrets et peuvent être réintroduits dans la mathématique intuitive.

C.N.R.S. U.M.R. 8519, cassou-nogues@wanadoo.fr

TEXTES CITÉS

[1] BROUWER Luitzen E. J. (1908) : "De Onbetrouwbaarheid der logische principes", Tijdschr. voor Wisbegeert, 1908, t.2, p. 152-8 ; tr. fr. : "Qu'on ne peut pas se fier aux principes logiques", dans Largeault (1992), p. 15-24.

[2] BROUWER Luitzen. E. J. (1913) : "Intuitionism and formalism", Bull. Amer. Math. Soc, 1913, t.20, p. 81-06 ; tr. fr. "Intuitionisme et formalisme", dans Largeault (1992), p. 39-55.

[3] CASSOU-NOGUÈS Pierre (2001-a) : *Hilbert*, Les Belles Lettres, Paris, 2001.

[4] CASSOU-NOGUÈS Pierre (à paraître-a) : *Gödel*, Les Belles Lettres, Paris, à paraître 2002-2003.

[5] CASSOU-NOGUÈS Pierre (à paraître-b) : "La double orientation et l'idéal rationaliste de la logique : Husserl et Gödel", à paraître.

[6] FEFERMAN Salomon (1988) : "Turing in the land of O(z)", dans Herken, R. (éd), *The Universal Turing Machine: A Half Century Survey*, Oxford Univ. Press., Oxford, 1998.

[7] FEFERMAN Salomon (1991) : "Reflecting on Incompleteness", *Journal of Symbolic Logic*, 56, 1991, p. 1-49.

[8] FEFERMAN Salomon (1998) : *In Light of Logic*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1998.

[9] GENTZEN Gerhard (1935) : "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", *Mathematische Annalen*, 1935, t.112, p. 493-565 ; tr. fr. : "La consistance de l'arithmétique élémentaire", dans Largeault (1992), p. 285-358.

[10] GÖDEL Kurt (1986-1995) : *Collected Works*, S. Feferman et alii, Clarendon Press, Oxford, 1986-1995.

[11] HILBERT David (1900) : "Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris, 1900", *Arch. der Math. und Physik*, 1900, t.1, p. 44-63 et p. 213-37 ; tr. fr. L. Laugel : *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, Ed. J. Gabay, Sceaux, 1990.

[12] HILBERT David (1925) : “Ueber das Unendliche”, *Mathematische Annalen*, 1926, t.95 ; tr. fr. : “Sur l'infini” dans Largeault, *Logique mathématique, textes*, A. Colin, Paris, 1972, p. 220-45.
[13] HILBERT David (1927) : “Die Grundlagen der Mathematik”, *Abh. aus d. Math. Semin. d. Hamb. Univ.*, 1928, t.6, p. 65-83 ; tr. fr. : “Les fondements des mathématiques”, dans Largeault (1992), p. 145-64.
[14] HILBERT David (1928) : “Probleme der Grundlegung der Mathematik”, *Mathematische Annalen*, 1929, t.102, p. 1-9 ; tr. fr. : “Problèmes de fondation des mathématiques”, dans Largeault (1992), p. 175-87.
[15] LARGEAULT Jean (1992) : *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Vrin, Paris, 1992.
[16] SINACEUR Hourya (1994) : “Du formalisme à la constructivité : le finitisme”, dans *Revue internationale de philosophie*, 1994.
[17] SINACEUR Hourya (1996) : “Le rôle de Poincaré dans la genèse de la métamathématique de Hilbert”, dans Greffe, J.-L. et Heinzmann, G. et Lorenz, K. (éds.), *Henri Poincaré : Science et philosophie*, Blanchard, Paris, 1996, p. 493-511.
[18] TURING Alan (1937) : “On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem”, reproduit dans Davis, M. (éd.) *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions*, Raven Press, Hewlett (N.Y.), 1965.
[19] TURING Alan (1939) : “Systems of logic based on ordinals”, reproduit dans Davis, M. (éd.) *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions*, Raven Press, Hewlett (N.Y.), 1965.
[20] WANG Hao (1974) : *From Mathematics to Philosophy*, Humanities Press, New York, 1974.
[21] WANG Hao (1996) : *A Logical Journey*, M.I.T. Press, London, 1996.